Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 3

1. Soit $C^\infty(\mathbb{R})$ l'espaces des fonctions réelles différentiables.
(a) Démontrer que la famille $\{\exp(\lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est libre.
(b) Démontrer que la famille $\{\sin(\lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{R}^{>0}\}$ est libre.

Suggestion: On cherche une application $\psi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ *telle que la fonction* $\exp(\lambda x)$ *est un vecteur propre de* ψ *avec la valeur propre* λ.

2. Soit $\phi : V \to V$ une application linéaire. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
(i) 0 est une valeur propre de ϕ,
(ii) $\ker \phi \neq \{0\}$,
(iii) ϕ n'est pas injective.

3. Soit $f \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \qquad a_i \in \mathbb{K}.$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On fait la définition (avec $A^0 = I_n$)

$$f(A) := \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \in M_n(\mathbb{K}).$$

(a) Soit $P \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice qui est inversible. Démontrer que

$$f(PAP^{-1}) = Pf(A)P^{-1}.$$

(b) Soit A une matrice qui est diagonalisable, c.à.d. il existe une matrice P inversible et D une matrice diagonale telle que $D = P^{-1}AP$. Soit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Démontrer que

$$f(A) = P \cdot \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

4. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Démontrer qu'il existe un polynôme g non-triviale du degr'e inférieur ou égale n^2, telle que $g(A) = 0$ (attention: ici 0 est la matrice nulle).

Suggestion: On considère toutes puissance A^k et on déduit qu'il existe une relation linéaire, non-triviale entre A^k pour $k = 0, 1, \ldots, n^2$. ($M_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de quelle dimension?)

(b) On dit que le polynôme f_A est le polynôme minimale de A, si et seulement si
(1) $f_A \neq 0$ (le polynôme zéro),
(2) $f_A(A) = 0$ (la matrice nulle),
(3) $g(A) = 0$ implique $g = 0$ ou le degré de g est $\geq$ le degré de f_A,
(4) f_A est normalisée, c.à.d. le coefficient $a_{degree f_A} = 1$.

Démontrer que le polynôme minimale de A est uniquement donné et son degré est inférieur ou égale à n^2.

5. Sur le corps $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$) il est aussi possible de considérer des séries de matrices à la manière des polynômes dans le problème 3. Soit $f(x)$ une série numériques

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. On prend comme la définition

$$f(A) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i \in M_n(\mathbb{R})$$

la limite de la suite de sommes partielles $f_k(A) := \sum_{i=1}^{k} a_i A^i$, si cette limite existe au sens d'analyse dans $\mathbb{R}^{n^2}$. Effectivement il est possible de démontrer que la limite existe s'il la série numérique $f(x)$ converge pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
(a) Démontrer les même assertion que dans le problème 3.
(b) Calculer

$$\exp\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$