Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

# Géométrie et Algèbre Linéaire 2

**Feuille d'exercices 4**

**1.** Calculer le déterminant

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{pmatrix}.$$

**2. Utiliser** les déterminants pour les problèmes suivantes
**(a)** Pour quelles valeurs de $\alpha$ les vecteurs

$$v_1 = {}^t(1,-1,0,2), \quad v_2 = {}^t(1,0,1,2), \quad v_3 = {}^t(1,3,5,7), \quad v_4 = {}^t(0,2,3,\alpha),$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?
**(b)** Pour quelles valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$${}^t(2,\mu,1), \quad {}^t(\lambda,0,1), \quad {}^t(\mu,\lambda,0) \quad \in \mathbb{R}^3,$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

**3.** Rappelez que on a $\text{dét}\ {}^tA = \text{dét}\ A$.
**(a)** Soit $A$ une matrice carrée de ordre $n$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\text{dét}\ (-A) = (-1)^n \text{dét}\ A.$$

**(b)** Soit $A$ une matrice anti-symétrique (i.e. on a ${}^tA = -A$) carrée d'ordre $n$ avec $n$ impair. Démontrer que $A$ n'est pas inversible.
**(c)** Est-ce que l'assertion (b) est aussi vrai pour $n$ pair?
**(d)** Soit $A$ une matrice anti-symétrique. Quelles valeurs sont possible pour $tr(A)$?

**4.** Déterminer les déterminants pour les matrices ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

**5.** Soient
$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
avec dét$(A) \neq 0$, et $x$ la solution de l'équation $Ax = b$. Donner $x_1$ et $x_2$ comme des fonctions des éléments $a_{ij}$ et $b_i$. Les fonctions sont-elles continues?

**6.** Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$
est-elle inversible? Calculer, dans ce cas, son inverse. (Utiliser le déterminant.)

**7.** Calculer le déterminant pour la matrice
$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix}.$$

**8.** Montrer que
$$\text{dét} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

**9.** Soient $A \in M_k(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-k}(\mathbb{R})$ et $B$ une matrice du type $(k, n-k)$. Soit $D$ la matrice composé $D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Montrer que dét $(D) =$ dét $(A) \cdot$ dét $(C)$.

Les pages de web du cours: `http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo`