

Martin Schlichenmaier  
 Université du Luxembourg

## Géométrie et Algèbre Linéaire 2

### Feuille d'exercices 5

- 1.** (a) Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ ? Si oui, donner les matrices diagonales et les matrices du passage.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Quelle sont les interprétations géométriques de ces applications?  
 (c) Faire la même que dans (a) sur le corps  $\mathbb{C}$ .

- 2.** Soit  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer toutes valeurs propres de  $A$  et les vecteurs propre associés.  
 (b) Est-ce que la matrice  $A$  est diagonalisable? C. à. d., est-ce qu'il existe une matrice  $T$  inversible et une matrice  $D$  diagonale, telles que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D ?$$

Si oui, donner les matrices  $D$  et  $T$ .

- 3.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice réelle avec  $b \cdot c > 0$ . Démontrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

- 4.** Soit  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Est-ce que la matrice  $A$  est diagonalisable? C. à. d., est-ce qu'il existe une matrice  $T$  inversible et une matrice  $D$  diagonale, telles que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D ?$$

- (b) Déterminer toutes valeurs propres de  $A$  et les vecteurs propre associés.  
 (c) Donner  $D$ ,  $T$  et  $T^{-1}$ .

**5.** Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ ? Si oui, donner les matrices diagonales et les matrices du passage.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**6.** Soit  $A$  la matrice réelle

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) En déterminer toutes les valeurs propres et les vecteurs propres associés.
- (b) Est-ce que la matrice  $A$  est diagonalisable? C'est-à-dire, est-ce qu'une matrice  $T$  inversible existe, telle que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D.$$

Si oui, donner les matrices  $D$  et  $T$ . (Le calcul de  $T^{-1}$  n'est pas nécessaire.)

**7.** Soit  $A$  la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Est-ce que la matrice  $A$  est diagonalisable? C'est-à-dire, est-ce qu'il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $T$  inversible, telles que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D?$$

Si oui, donner les matrices  $D$  et  $T$ .

**8.** Soit  $A \in M_4(\mathbb{R})$  telle que

- (i)  $\det(A) < 0$ ,
- (ii) les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sont des vecteurs propres de la matrice  $A$ .

Est-ce que la matrice  $A$  est diagonalisable?

Les pages **NOUVEAUX** de web du cours:

<http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours-geo>