

Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 5

1. (a) Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables sur \mathbb{R} ? Si oui, donner les matrices diagonales et les matrices du passage.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Quelle sont les interprétations géométriques de ces applications?

(c) Faire la même que dans (a) sur le corps \mathbb{C} .

2. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer toutes valeurs propres de A et les vecteurs propre associés.

(b) Est-ce que la matrice A est diagonalisable? C. à. d., est-ce qu'il existe une matrice T inversible et une matrice D diagonale, telles que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D ?$$

Si oui, donner les matrices D et T .

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle avec $b \cdot c > 0$. Démontrer que A est diagonalisable sur \mathbb{R} .

4. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Est-ce que la matrice A est diagonalisable? C. à. d., est-ce qu'il existe une matrice T inversible et une matrice D diagonale, telles que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D ?$$

(b) Déterminer toutes valeurs propres de A et les vecteurs propre associés.

(c) Donner D , T et T^{-1} .

5. Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables sur \mathbb{C} ? Si oui, donner les matrices diagonales et les matrices du passage.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Soit A la matrice réelle

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) En déterminer toutes les valeurs propres et les vecteurs propres associés.
(b) Est-ce que la matrice A est diagonalisable? C'est-à-dire, est-ce qu'une matrice T inversible existe, telle que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D.$$

Si oui, donner les matrices D et T . (Le calcul de T^{-1} n'est pas nécessaire.)

7. Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Est-ce que la matrice A est diagonalisable? C'est-à-dire, est-ce qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice T inversible, telles que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D?$$

Si oui, donner les matrices D et T .

8. Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ telle que

- (i) $\det(A) < 0$,
(ii) les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sont des vecteurs propres de la matrice A .

Est-ce que la matrice A est diagonalisable?

Les pages **NOUVEAUX** de web du cours:

<http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours-geo>