Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

# Géométrie et Algèbre Linéaire 2

### Feuille d'exercices 6

**1.** Soit $V = C[a,b]$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'interval $[a,b]$, $a < b$. Montrer que

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire pour $V$.

**2.** Soit $V = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale $n$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels distincts. Montrer que

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1} f(a_i)g(a_i), \quad f, g \in \mathbb{R}_n[x]$$

est un produit scalaire pour $V$.

**3.** Soit $V$ un espace vectoriel muni un produit scalaire $\langle ., .\rangle$. Démontrer que pour tous vecteurs $x, y \in V$ on a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right),$$
$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2,$$
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right).$$

(La deuxième formule s'appelle "la formule du parallélogramme".)

**4.** Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Donner la forme bilinéaire

$$\varphi_A(x,y) = {}^t x \cdot A \cdot y,$$

demontrer que $\varphi_A$ est symétrique si et seulement si $A$ est une matrice symétrique (i.e. $A = {}^t A$).

**5.** Soit $V$ un espace vectoriels réel. Soit $||.|| : V \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$||x|| \geq 0, \quad ||x|| = 0 \text{ ssi } x = 0,$$
$$||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||,$$
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||,$$

quels que soient $x, y, \lambda$. Le couple $(V, ||.||)$ s'appelle un espace vectoriels normé. L'application $||.||$ s'appelle la norme.
(a) Répéter que un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ sur un espace vectoriel donne une norme par la définition

$$||x|| := \sqrt{\langle x, y \rangle}.$$

(b) Démontrer ($x, y \in V$, un espace normé quelconque)

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

(c) Dans $\mathbb{R}^n$ on définit

$$||x||_k := \sqrt[k]{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad ||x||_\infty := \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Montrer que $||.||_k$, pour $k = 1, 2$ et pour $k = \infty$ est une norme. (En fait, $||.||_k$ est une norme pour toute valeur $k$.)
Montrer que $||.||_1$ et $||.||_\infty$ ne provient pas d'un produit scalaire (regarder la formule du parallélogramme).

**6.** (Le théorème de Pythagore) Soit $E$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Soient $x, y \in E$. Montrer que $x$ et $y$ sont orthogonaux ssi

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

**7.** Écrire la matrice $A$ associée à la forme bilinéaire $\varphi$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 4x_2y_1 + 5x_2y_2 - 6x_2y_3 + 7x_3y_1 - 8x_3y_2 + 9x_3y_3.$$

**8.** Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ par $\langle x, y \rangle = {}^t x A y$.

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours-geo`