Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 7

1. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire standard une base est donné par

$$a^{(1)} = {}^t(1, 0, -1), \quad a^{(2)} = {}^t(1, -1, 3), \quad a^{(3)} = {}^t(0, 7, 8).$$

Déterminer une base orthonormé $\{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$, telle que on a pour les sous-espaces engendrés

$$< b^{(1)} >=< a^{(1)} >, \qquad < b^{(1)}, b^{(2)} >=< a^{(1)}, a^{(2)} >,$$
$$< b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)} >=< a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)} > .$$

2. Rappelons que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels peut être muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \qquad (*)$$

Une base de $\mathbb{R}[x]$ est donnée par $1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...$

(a) En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette base, on obtient une base orthonormée $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$. Calculer P_0, P_1 et P_2.

(b) Soit donné la fonction $f(x) = exp(x)$. Chercher le polynôme du degré ≤ 2 le plus proche à la fonction $f(x)$ (par rapport de la distance donnée par la norme associée au produit (*)).

3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard soit $W = \langle\ {}^t(1, 1, 1), {}^t(1, 2, 3)\ \rangle$ un sous-espace. Déterminer le sous-espace orthogonal $W^\perp$.

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours-geo`

4. Soient $f, g : V \to V$ des endomorphismes.

(a) Démontrer que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
(b) Soient f, g auto-adjoints. Démontrer que $f \circ g$ est auto-adjoint si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.
(c) Soit f auto-adjoint et nilpotent (c.à.d. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que on a $f^k = 0$). Démontrer que $f = 0$.
(d) Soit $f^* = -f$. Les valeurs propres complexes de f sont de quel type?

5. (a) Démontrer que $A \in SO(2)$ si et seulement s'il existent $a, b \in \mathbb{R}$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = 1.$$

(b) Démontrer que $A \in SO(2)$ si et seulement s'il existent $\phi \in \mathbb{R}$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

6. Soit A une matrice réelle. Démontrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique. Démontrer que ${}^tAA$ est diagonalisable et que toutes les valeurs propre sont ≥ 0.

7. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Est-ce que la matrice A est diagonalisable? C. à. d., est-ce qu'il existe une matrice T inversible et une matrice D diagonale, telle que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D \ ?$$

(b) Déterminer toutes valeurs propres de A et les vecteurs propre associés. Calcules une base des vecteurs propres orthonormées.
(c) Donner D, T et T^{-1}.

8. Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ par $\langle x, y \rangle_A = {}^txAy$.