Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 2

1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soient $v_i \in V$, $i = 1, 2, \dots, n$. Demontre que

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_i, \dots v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, \alpha v_i, \dots v_n \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0,$$
$$\langle v_1, v_2, \dots, v_i, \dots v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_i + \alpha v_j, \dots v_n \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{K}, i \neq j,$$
$$\langle v_1, v_2, \dots, v_i, \dots v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_i, \dots v_n, 0 \rangle,$$
$$\langle v_1, v_2, \dots, v_i, \dots v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_i, \dots v_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \rangle, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

2. **(a)** La famille v_1, v_2, v_3 où $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, -1, 5)$ est-elle libre? Quelle relation linéaire lie ces vecteurs. Est-elle génératrice pour $\mathbb{R}^3$?
(b) Mêmes questions pour la famille v_1, v_2, v_3
où $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $v_3 = (2, 3, 2)$.

3. Soit $C^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont différentiables pour chaque ordre. Montrer que les familles suivantes sont libres:

a) $\{x, e^x\}$, **b**) $\{e^x, e^{x^2}\}$, **c**) $\{x, \sin(x)\}$,

d) $\{1, e^x, e^{2x}\}$, **e**) $\{1, \sin(x), \sin(2x)\}$.

f) $\{1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}\}$, **g**) $\{1, \sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(nx)\}$.

4. Soient F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$F_1 \cap (F_2 + F_3) \supseteq (F_1 \cap F_2) + (F_1 \cap F_3).$$

A-t-on l'inclusion contraire?

5. Soient

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \in \mathbb{R}^3.$$

Soient $W = \langle x, y, z \rangle$ et $V = \langle e_1, e_2 \rangle$ les sous-espaces vectoriels engendrés par ces vecteurs.
(a) Quelles sont les dimensions de W et V?
(b) Déterminer $Z = V \cap W$. Donner une base de Z.
(c) Soit $V + W$ la somme des sous-espaces vectoriels. Déterminer $V + W$. Par définition de la somme chaque vecteur $u \in V + W$ s'écrit comme $u = v + w$, avec des vecteurs $v \in V$ et $w \in W$. Le vecteur $v \in V$ et le vecteur $w \in W$ sont-ils uniquement déterminés par le vecteur u?

6. Soit $M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées du type $n \times n$. Pour une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$ la *trace* est la somme des termes de la diagonale principale

$$\mathrm{tr}\ A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Montrer que l'ensemble

$$E := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}\ (A) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$. En donner une base pour $n = 2$.
(b) Soit V l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ à trace nulle est telles que la somme des éléments de chaque ligne est nulle. Montrer que V est sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$. En donner une base pour $n = 3$.

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et ${}^tA$ la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont les lignes sont les colonnes de A. La matrice ${}^tA$ est dite *transposée* de A. On dit que A est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$)
(a) Montrer que les ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ des matrices respectivement symétriques et antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$.
(b) Soit maintenant $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$. Déterminer une base et la dimension de $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ pour $n = 3$. Généraliser à n quelconque.
(c) Montrer que (aussi pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}).$$

(d) Les assertions (b) et (c) sont-ils aussi vrai pour un corps quelconque? Quelle condition est nécessaire pour le corps?

Les pages de web du cours: `http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo`