Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 2a

pour les mathématicien

Pour les suivantes, soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n et $R = (O, e^1, e^2, \dots e^n)$ un repère. Souvent les point M de $\mathcal{A}$ sont donnés comme $M(c_1, c_2, \dots, c_n)$ avec les coordonnées $c_i \in \mathbb{K}$ (par rapport au repère). Aussi, souvent les vecteurs v sont donnés comme $v(v_1, v_2, \dots, v_n)$ avec les coordonnées $v_i \in \mathbb{K}$.

1. Soient M_1 et M_2 deux points. Quelle est la signification géométrique du équibarycentre des M_1 et M_2?

2. Dans un espace affine réel de dimension 4, considérons le sous-espace affine $\mathcal{A}'$ engendré par le point $M_0(-1, 1, -1, 1)$ et les vecteurs $v^1(1, 2, 3, 4)$ et $v^2(0, 1, 2, 3)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{A}'$.

3. Écrire l'équation vectorielle et l'équation cartésienne du plan passant par le point $P(-1, 2, -3)$ et contenant la droite $\mathcal{D}$ qui passe par les points $Q(0, -7, 4)$ et $R(4, -1, 2)$.

4. Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace affine de dimension 3. Soient donnés deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ par les équations cartésiennes:

$$\mathcal{P}_1 : \quad x - y + 3z = 0, \qquad\qquad \mathcal{P}_1 : \quad x + y + z = 2.$$

(a) Est-ce que les deux plans sont parallèles?
(b) Est-ce que les deux plans ont une intersection non-vide? Si oui, déterminer cette intersection par donner les équations cartésiennes **et** les équations vectorielles pour l'intersection.
(c) Déterminer les équations vectorielles pour $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

5. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques

$$x = 3 + 3\lambda, \quad y = 1 + \lambda, \quad z = 1 - \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{K}$$

est contenue dans le plan $\mathcal{P}$ d'équations paramétriques

$$x = 1 + \lambda + \mu, \quad y = 1 - \lambda + \mu, \quad z = 1 + \lambda - \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

6. Déterminer, selon les valeurs de a, la position relative des trois plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ définies par:

$\mathcal{P}_1 : \ ax - y + 3z + 3 = 0; \quad \mathcal{P}_2 : \ x + ay - az + 1 = 0; \quad \mathcal{P}_3 : \ 3x - 4y + 8z + 5 = 0.$

7. On donne le plan $\mathcal{P}$ d'équations $x + y + z = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques

$$x = 1 + 2\lambda, \quad y = 2 + \lambda, \quad z = 1 - 2\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Déterminer les équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$ menée par le point $A(1, 1, 1)$, parallèle au plan $\mathcal{P}$ et rencontrant la droite $\mathcal{D}$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$.

8. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites de l'espace affine d'équations

$$\mathcal{D}_1 : \quad x - 2y + 2z - a = 0, \quad x + y + z - 1 = 0;$$

$$\mathcal{D}_2 : \quad x - 2z - 1 = 0, \quad y - z - 2 = 0.$$

Déterminer a pour que les droites soient coplanaires et déterminer l'équation du plan qui les contient.

Les pages de web du cours: `http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo`