Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 3

1. Soit $C^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont différentiables pour chaque ordre. Déterminer la dimension de sous-espace
$$\langle \cos^2(x), \sin^2(x), 1\rangle.$$
Donner une base.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on a donné les trois vecteurs
$$x = (1, 0, 0), \quad y = (1, 1, 0), \quad z_t = (1, 2, t^2 - 1).$$
Ici t est un paramètre réel. Pour quelle valeurs du paramètre t les vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on a donné les trois vecteurs
$$x = (-1, 2, 0), \quad y = (1, 0, 1), \quad z = (0, 2, 1).$$
(a) Est-ce que les vecteurs sont libre?
(b) Déterminer une base de l'espace
$$\langle x, y, z\rangle$$
qui est un sous-ensemble de $\{x, y, z\}$.
(c) Si nécessaire compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ on a donné les cinq vecteurs
$$v = (1, -2, 0, 0), \quad w = (1, 1, 0, 0), \quad x = (0, 1, 2, 1),$$
$$y = (1, 1, 3, 2), \quad z = (0, -3, 0, 0).$$
(a) Est-ce que les vecteurs v, w, x, y, z forment une base de $\mathbb{R}^4$?
(b) Est-ce que les vecteurs v, w, x, y forment une base de $\mathbb{R}^4$?
(a) Est-ce que les vecteurs v, w, x, z forment une base de $\mathbb{R}^4$?

5. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on a donné les sous-espaces vectoriels

$$W_1 = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle, \quad W_2 = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle, \quad W_3 = \langle \begin{pmatrix}20\\0\\0\end{pmatrix} \rangle.$$

Déterminer

$$W_1 \cap W_2, \quad W_1 + W_2, \quad W_3 \cap W_2, \quad W_3 + W_2.$$

6. (a) Soit M l'ensemble de solutions du système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

$$x_1 - x_2 = 0,$$

c.à.d. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0\}$. Montrer que M est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Déterminer sa dimension et donner une base de M.

(b) Les mêmes questions pour l'ensemble de solutions du système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^4$

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0.$$

Les pages de web du cours: `http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo`