Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 4

1. Soit ψ l'application

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Montrer que ψ est linéaire. Déterminer les dimensions de $\operatorname{im}\psi$ et de $\ker\psi$. Donner une base du $\ker\psi$.

2. Soit tr l'application trace

$$\operatorname{tr} : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \mapsto tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Montrer que tr est linéaire. Déterminer les dimensions de $\operatorname{im}\operatorname{tr}$ et $\ker\operatorname{tr}$. Donner une base du $\ker\operatorname{tr}$.

3. Les applications suivantes sont-elles linéaires?

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (3x + 2y, x),\\
&\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},\\
&\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z},\\
&\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto \bar{z}, \quad \text{sur le corps } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4. Soit V un espace vectoriel. (a) Soit $f : V \to V$ une application linéaire bijective. Montrer que f^{-1} est aussi linéaire.
(b) Aut (V) est l'ensemble des applications linéaires bijective $V \to V$. Montrer que (avec la composition des application) Aut (V) est un groupe.

5. Soit $f : V \to V$ une application linéaire. Et soit $v \in V$ un vecteur tel que

$$\text{il existe } n \in \mathbb{N} : \qquad f^n(v) \neq 0, \quad f^{n+1}(v) = 0.$$

Montrer que la famille

$$\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v), f^n(v)\}$$

est libre.

6. Soit $f : V \to V$ une application linéaire. Soit

$$\mathrm{Fix}\, f := \{v \in V \mid f(v) = v\}$$

l'ensemble de points fixes de f.
(a) Montrer que $\mathrm{Fix}\, f$ est un sous-espace vectoriel de V.
(b) Déterminer $\mathrm{Fix}\, f$ pour

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

(c) Déterminer $\mathrm{Fix}\, D$ pour

$$D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto P'.$$

(d) Déterminer $\mathrm{Fix}\, D$ pour

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad h \mapsto h'.$$

7. Soit $f : V \to V$ une application linéaire avec $f^2 = f$. Montrer qu'il existe des sous-espace vectoriels U et W tels que

$$V = U \oplus W, \qquad f(W) = 0, \quad f(u) = u, \forall u \in U.$$

8. Soit $f : V \to W$ une application linéaire surjective. Soit pour $w \in W$

$$f^{-1}(w) := \{v \in V \mid f(v) = w\}.$$

Montrer qu'il existe un $v_0 \in V$ tel que $f^{-1}(w) = v_0 + \ker f$. Est-ce que v_0 est unique?

Les pages de web du cours: `http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo`