Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 5

1. Soient V et W deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et $L(V,W)$ l'ensemble des applications linéaires $f : V \to W$.
(a) Montrer que si on fait la definition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (r \cdot f)(x) := r \cdot f(x), \qquad f, g \in L(V,W),\ r \in K$$

$(L(V,W), +, \cdot)$ est un espace vectoriel. (Pour $L(V,\mathbb{K})$ on ecrit aussi V^*).
(b) Soient $\dim V = n$ et $\dim V = m$. Soient $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ deux bases correspondantes. Soit $e_{i,j} : V \to W$ l'application linéaire qui est donné par la description

$$e_{i,j}(v_k) := \begin{cases} w_i, & \text{si } k = j, \\ 0, & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

pour $i = 1, \ldots n$ et $j = 1, \ldots m$.
Pour quoi, ça donne une application linéaire?
(c) Montrer que la famille $\{e_{i,j}\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ est une base de $L(V,W)$.
(d) Montrer que $\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

2. On donne les systèmes d'équations linéaires suivants. Dans chaque cas répondre aux questions suivantes. Est-ce qu'il existe une solution? Si oui, déterminer l'ensemble de solutions. (En utilisant l'algorithme de Gauss.)

(a)

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} .$$

(b)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & = & 2 \end{array} .$$

(c)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} .$$

(d)

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 10y & - & 8z & + & 11w & = & 12 \end{array} .$$

3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

(a) n'a pas de solution; (b) a une infinité de solutions; (c) a une solution unique. (Il n'est pas necessaire de déterminer l'ensemble de solutions.)

4. Pour quelles valeurs de a, b, c le système suivant admet-il au moins une solution?

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 3x & + & 8y & - & 14z & = & b \\ 2x & & & + & 4z & = & c \end{array} .$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. Déterminer l'ensemble de solutions L_t du système des équations linéaires

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & t \cdot y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & (1-t) \cdot y & - & z & = & 1 \\ x & + & (1+t) \cdot y & + & (t^2+4)z & = & (t+2) \end{array} ,$$

dépendante de la valeur de t. Pour préciser,

$L_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z)$ est une solution du système avec le paramètre t qui est fixé$\}$.

6. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & + & 5x_4 & = 0 \end{array} \quad .$$

7. Donner les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \qquad W_t = \langle x, y, z \rangle$$

avec t un paramètre réel et les vecteurs

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2+t \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer $\dim W_t$ dépendante de la valeur de t.
(b) Donner une base de W_t qui est un sous-ensemble de $\{x, y, z\}$.
(c) Calculer la dimension et une base de $U_t := V \cap W_t$.

8. (a) Pour quelles valeurs de α les vecteurs

$$v_1 = {}^t(1, -1, 0, 2), \quad v_2 = {}^t(1, 0, 1, 2), \quad v_3 = {}^t(1, 3, 5, 7), \quad v_4 = {}^t(0, 2, 3, \alpha),$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?
(b) Dans les cas où la famille est liée, déterminer les relations linéaires qui lient ces vecteurs. Quelle est la dimension de l'espace engendré?
(c) Soit $v = {}^t(-2, k, 1, 3)$. Pour quelles valeurs de k le vecteur $v \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$? Déterminer, dans ce cas, les composantes de v dans une base de $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Les pages de web du cours: `http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo`