Martin Schlichenmaier

Examen février 2007

Géométrie et Algèbre Linéaire 1

La durée est 2 heures (en total 40 points d'examen sont possible qui correspond à 20 points de la note)

Attention: Donner seulement les résultats, ce ne suffit pas. Des arguments, des démonstration ou des calculs sont toujours nécessaires.

Documents, calculettes, téléphones portables, etc. non autorisés!

Problème 1. (10 points)
(a) Déterminer l'ensemble de solution du système d'équations linéaires (sur $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{array}$$

(b) Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système (sur $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 4z & = & -1 \\ x & - & my & + & m^2z & = & m+1 \\ 2x & + & my & + & 2mz & = & 2 \end{array} ,$$

(i) a une solution unique; (ii) n'a pas de solution; (iii) a une infinité de solutions.
Attention: Le calcul des solution n'est pas demandé.

Problème 2. (6 points)
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on a donné les trois vecteurs

$$u = {}^t(1,1,1), \quad v = {}^t(0,1,2), \quad w = {}^t(2,3,4).$$

(a) Est-ce que les vecteurs sont libre?

(b) Déterminer une base de l'espace

$$\langle u, v, w \rangle$$

tel que cette base est un sous-ensemble de $\{u, v, w\}$.

(c) Si nécessaire compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Problème 3. (8 points)
Soit $f : V \to V$ une application linéaire. Et soit $v \in V$, $v \neq 0$ un vecteur tel que

$$\text{il existe } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 : \qquad f^n(v) \neq 0, \quad f^{n+1}(v) = 0.$$

Montrer que la famille

$$\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v), f^n(v)\}$$

est libre.

Problème 4. (8 points)
Soit $f : V \to V$ une application linéaire. Soit

$$\mathrm{Fix}\, f := \{v \in V \mid f(v) = v\}$$

l'ensemble de points fixes de f.

(a) Montrer que $\mathrm{Fix}\, f$ est un sous-espace vectoriel de V.

(b) Déterminer $\mathrm{Fix}\, f$ pour

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto f(v) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v.$$

Problème 5. (8 points)
Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer la matrice A^{-1}.

(b) Quel est le rang de A et de A^{-1}.

(c) Soit $b = {}^t(2, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la solution $x \in \mathbb{R}^3$ de l'équation

$$A \cdot x = b.$$

(Pour (c) On peut utiliser le résultat (a))