Martin Schlichenmaier

Examen janvier 2009

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

La durée est 2 heures (en total 40 points d'examen sont possible qui correspond à 20 points de la note)

Attention: Donner seulement les résultats, ce ne suffit pas. Des arguments, des démonstration ou des calculs sont toujours nécessaires.

Documents, calculettes, téléphones portables, etc. non autorisés!

Problème 1. (6 points)
(a) Soit A la matrice réelle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que la matrice A est diagonalisable?

(a) Soit B la matrice réelle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que la matrice B est diagonalisable?

Problème 2. (10 points)
(a) Soit $f : V \to V$, $\dim V < \infty$, une application linéaire. Soit f diagonalisable. Est-ce que f^n, $n \in \mathbb{N}$ est aussi diagonalisable? Si qui, quelles sont les valeurs propres et les vecteur propres?
(b) Soit $f : V \to V$, $\dim V < \infty$, une application linéaire qui est nilpotente (c.à.d. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$).
Montrer que f a la valeur 0 comme valeur propre, et que 0 est la seule valeur propre de f.
En déduire que si f est diagonalisable et nilpotente, alors $f = 0$.

Problème 3. (6 points)
Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$^t(2, \alpha, 1), \quad ^t(\beta, 0, 1), \quad ^t(\alpha, \beta, 0) \quad \in \mathbb{R}^3,$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? (*Peut-être le déterminant est utile.*)

Problème 4. (12 points)
Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

(a) Est-ce que la matrice A est diagonalisable? C'est-à-dire, est-ce qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice T inversible, telles que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D?$$

Si oui, donner des matrice D, T, et T^{-1}.

(b) Est-ce que les matrices D et T sont uniquement fixées par la matrice A?

(c) Est-ce que la forme bilinéaire

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_A := {}^t x A y$$

est un produit scalaire pour $\mathbb{R}^3$?

Problème 5. (6 points)
Soit $V = \mathbb{R}^3$ muni avec le produit scalaire standard. Soit W le sous-espace vectoriel

$$W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(a) Déterminer le complément orthogonal $W^\perp$ de W.
(b) Donner une base orthonormée $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ par rapport au produit standard telle que $\{v_1, v_2\}$ et une base de W.