Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 1

1. Soit M un ensemble et soient A et B deux sous-ensemble de M. On dénote le complément de A dans M par $C_M(A)$. Vérifier que

$$C_M(A \cup B) = C_M(A) \cap C_M(B), \qquad C_M(A \cap B) = C_M(A) \cup C_M(B).$$

2. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux applications, tels que

$$f \circ g = id_B, \qquad g \circ f = id_A.$$

Démontrer que f est une bijection est nécessairement g est l'application inverse f^{-1} de f.

3. Soit G un ensemble avec une loi interne $\circ$ qui est associative. Démontrer que
(a) L'élément neutre est unique s'il existe.
(b) Le symétrique de $g \in G$ est unique s'il existe.

4. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $\mathbb{K}^n$ le produit cartésien avec n facteurs. Dans le cours nous avons introduit une addition $+$ entre les éléments du $\mathbb{K}^n$, et une multiplication $\cdot$ entre les éléments du $\mathbb{K}$ et les éléments du $\mathbb{K}^n$. Vérifier en détail, que $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel. Rappel:

$$\begin{gathered} x, y \in \mathbb{K}^n, \quad \alpha \in \mathbb{K} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \; x_i, y_i \in \mathbb{K}, \\ x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot x := (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n). \end{gathered}$$

Démontrer que $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel.

5. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$? Si oui, pourquoi? Si non, pourquoi pas?

$$V_1 := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b = c+d\}$$
$$V_2 := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b = 1\}$$
$$V_3 := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 = b, c = 0, d = 0\}$$
$$V_4 := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 = 0\}$$
$$V_5 := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 = 1\}$$
$$V_6 := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 = -1\}$$
$$V_7 := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a \cdot b = 0\}$$
$$V_8 := \{(a+2b, a, 2a-b, b) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$
$$V_9 := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b = 0\}$$

Si on remplace $\mathbb{R}^4$ par $\mathbb{C}^4$ (ici $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes) est-ce que les résultats sont les mêmes que pour $\mathbb{R}^4$.

6. Soit V un espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$). Montrer que un sous-ensemble W est un sous-espace vectoriels si est seulement si

(1) W est non-vide ($W \neq \emptyset$),
(2) $\forall x, y \in W$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a $\alpha x + \beta y \in W$.

7. Soient a, b deux nombres réels, $a < b$ et I l'intervalle réel $]a, b[$ entre $a, b \in \mathbb{R}$ et $C^1(I)$ l'ensemble des applications $I \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables. Montrer que $C^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $App(I, \mathbb{R})$.

8. Soit $\mathbb{F}_2$ l'ensemble qui comporte deux éléments $\bar{0}$ et $\bar{1}$, $\mathbb{F}_2 := \{\bar{0}, \bar{1}\}$. On donne les lois internes $+$ et $\cdot$ comme

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \quad \bar{1} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}, \quad \bar{1} + \bar{1} = \bar{0},$$

et

$$\bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0}, \quad \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{0}, \quad \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}.$$

Montrer que $\mathbb{F}_2$ avec $+$ et $\cdot$ est un corps.

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo`