Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 1

1. Soit t un paramètre réel. En utilisant l'algorithme de Gauss **(!)** déterminer l'ensemble de solution L_t (en fonction de la valeur t) du système d'équations linéaires

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & t. \end{array}$$

2. Soit b un paramètre réel et $f_b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donné par

$$v \mapsto f_b(v) = A_b \cdot v, \qquad A_b := \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le rang de la matrice A_b (en fonction de la valeur b).

(b) Pour quelle valeurs de b l'application f_b est un isomorphisme.

(c) Déterminer les dimensions du noyau $\ker f_b$ et de l'image $\operatorname{im} f_b$
(en fonction de la valeur b).

(d) Déterminer le noyau $\ker f_b$ en donner une base de noyau
(en fonction de la valeur b).

(e) Déterminer l'image $\operatorname{im} f_b$ en donner une base de l'image
(en fonction de la valeur b).

3. Soit R_ϕ la rotation par l'angle ϕ autour de $0 \in \mathbb{R}^2$.
(a) Vérifier $R_{\phi_1+\phi_2} = R_{\phi_1} \circ R_{\phi_2}$.
(b) Soit $B := \{e_1, e_2\}$ la base standard de $\mathbb{R}^2$. Calculer $M_B(R_\phi) \in Mat_2(\mathbb{R})$.
(c) Vérifier directement

$$M_B(R_{\phi_1+\phi_2}) = M_B(R_{\phi_1} \circ R_{\phi_2}) = M_B(R_{\phi_1}) \cdot M_B(R_{\phi_2}).$$

4. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$, B une base de V quelconque, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $\phi_\lambda : V \to V$, $v \mapsto \lambda v$. Donner la matrice $M_B(\phi_\lambda)$.

5. Dans $\mathbb{R}^3$ sont donné la base standard $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et la base $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ avec

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $M_{B,B}(id)$, $M_{B,B'}(id)$, $M_{B',B}(id)$ et $M_{B',B'}(id)$.

6. (a) Soient A une matrice de type $m \times n$, P une matrice de type $n \times n$ qui est inversible, et Q une matrice de type $m \times m$ qui est inversible. Démontrer que

$$\mathrm{rg}\ (A) = \mathrm{rg}\ (QA) = \mathrm{rg}\ (AP) = \mathrm{rg}\ (QAP).$$

(b) Soient A une matrice de type $n \times n$ et tr (A) la trace de la matrice A (la somme des termes de la diagonale de A). Démontrer que tr (AB) = tr (BA).
(c) Soient A une matrice de type $n \times n$, P une matrice de type $n \times n$ qui est inversible. Démontrer que

$$\mathrm{tr}\ (P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\ (A).$$

7. (a) Soient A, B deux matrices de type $n \times n$. On dit que B est semblable à la matrice A, sii il existe une matrice P de type $n \times n$ qui est inversible telle que on a $B = P^{-1}AP$. On note $B \sim A$. Démontrer que d'être semblable ($\sim$) est une relation d'équivalence.
(b) Soit $Cl(A)$ la classe d'équivalence de A. Démontrer que pour B et $B' \in Cl(A)$ on a nécessairement

$$\mathrm{rg}\ (B) = \mathrm{rg}\ (B'), \qquad \mathrm{tr}\ (B) = \mathrm{tr}\ (B').$$

Est-ce que ces conditions sont aussi suffisantes?

8. Est-ce que les couples des matrices suivantes sont semblable?
(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo`