Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 2

1. (a) Soit $B := \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$e'_1 := e_1 + e_2 - e_3, \quad e'_2 := e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_3 := -e_1 + e_2 + e_3$$

3 vecteurs. Montrer que $B := \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage $P_{B \to B'}$ et calculer la matrice de passage $P_{B' \to B}$.
(b) Soit donné une application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui dans la base B est representé par la matrice avec des parametres $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice de ϕ dans la base B'.

2. (a) Soit R_α la rotation avec l'angle α autour de ${}^t(0,0)$. Pour quelles valeurs α l'application R_α est diagonalisable? Quelles sont ses valeurs propres, quels sont ses vecteurs propres?
(b) Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer ses valeurs propres et ses vecteur propres. Est-ce que la matrice A est diagonalisable?
(c) Soit B la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer ses valeurs propres et ses vecteur propres. Est-ce que la matrice B est diagonalisable?

3. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que la matrice A est diagonalisable.

4. (a) Soit $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ une matrice diagonale. Déterminer D^k pour $k \in \mathbb{N}$.
(b) Soient $A, D, P \in Mat_n(\mathbb{K})$ avec D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que on a $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Déterminer A^k, $k \in \mathbb{N}$.
(c) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

En utilisant (a) et (b) déterminer une formule pour A^k (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
(d) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant (a) et (b) déterminer une formule pour A^k (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
(e) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant (a) et (b) déterminer une formule pour A^k (pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

5. Les nombres de Fibonacci f_i sont définies dans une manière recursive par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \qquad n \geq 1.$$

Trouver une formule (non-recursive) pour f_n comme une fonction de n.
Suggestion: Déterminer une matrice $A \in Mat_2(\mathbb{R})$, telle que on a

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad .$$

Utiliser les résultats dans 4.

6. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que la matrice A est diagonalisable? C. à. d., est-ce que on trouve une matrice T inversible, telle que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D \ ?$$

Si oui, donner les matrices D et T.

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo`