Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 3

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(a) Quelles sont les valeur propres de A?

(b) Soient les a_{ii}, $i = 1, 2 \ldots, n$ deux à deux différentes. Montrer que A est diagonalisable.

2. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable a une et une seule des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ \lambda_1 \neq \lambda_2, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

3. (a) Soit $f : V \to V$, $\dim V < \infty$, une application linéaire. Soit f diagonalisable. Est-ce que f^n, $n \in \mathbb{N}$ est aussi diagonalisable? Si oui, quelles sont les valeurs propres et les vecteur propres?
(b) Soit $f : V \to V$, $\dim V < \infty$, une application linéaire qui est nilpotente (c.à.d. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$). Montrer que f admet comme seule valeur propre 0. En déduire que si f est diagonalisable et nilpotente, alors $f = 0$.

4. Soit $C^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles différentiables.
(a) Démontrer que la famille $\{\exp(\lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est libre.
(b) Démontrer que la famille $\{\sin(\lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{R}^{>0}\}$ est libre.
Suggestion: On cherche une application $\psi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ *telle que la fonction* $\exp(\lambda x)$ *est un vecteur propre de* ψ *avec la valeur propre* λ.

5. Soit $\phi : V \to V$ une application linéaire. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
(i) 0 est une valeur propre de ϕ,
(ii) $\ker \phi \neq \{0\}$,
(iii) ϕ n'est pas injective.

6. Soit $f \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \qquad a_i \in \mathbb{K}.$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On fait la définition (avec $A^0 = I_n$)

$$f(A) := \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \in M_n(\mathbb{K}).$$

(a) Soit $P \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice qui est inversible. Démontrer que

$$f(PAP^{-1}) = Pf(A)P^{-1}.$$

(b) Soit A une matrice qui est diagonalisable, c.à.d. il existe une matrice P inversible et D une matrice diagonale telle que $D = P^{-1}AP$. Soit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Démontrer que

$$f(A) = P \cdot \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo`