Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 4

1. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Démontrer qu'il existe un polynôme g non-triviale du degré inférieur ou égale n^2, telle que $g(A) = 0$ (attention: ici 0 est la matrice nulle).

Suggestion: On considère toutes puissance A^k et on déduit qu'il existe une relation linéaire, non-triviale entre A^k pour $k = 0, 1, \ldots, n^2$. ($M_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de quelle dimension?)

(b) On dit que le polynôme f_A est le polynôme minimale de A, si et seulement si
(1) $f_A \neq 0$ (le polynôme zéro),
(2) $f_A(A) = 0$ (la matrice nulle),
(3) $g(A) = 0$ implique $g = 0$ ou le degré de g est $\geq$ le degré de f_A,
(4) f_A est normalisée, c.à.d. le coefficient $a_{degree f_A} = 1$.

Démontrer que le polynôme minimale de A est uniquement donné et son degré est inférieur ou égale à n^2.

2. Sur le corps $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$) il est aussi possible de considérer des séries de matrices à la manière des polynômes dans le problème 6, feuille 3. Soit $f(x)$ une série numériques

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \qquad a_i \in \mathbb{R},$$

et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. On prend comme la définition

$$f(A) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i \in M_n(\mathbb{R})$$

la limite de la suite de sommes partielles $f_k(A) := \sum_{i=0}^{k} a_i A^i$, si cette limite existe au sens d'analyse dans $\mathbb{R}^{n^2}$. Effectivement il est possible de démontrer que la limite existe s'il la série numérique $f(x)$ converge pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
(a) Démontrer les même assertion que dans le problème 3.
(b) Calculer

$$\exp\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3. Soient V un espace vectoriel et φ une forme k-linéaire sur V. Soit

$$\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$$

si 2 arguments sont les mêmes.
Démontrer que φ est une forme k-linéaire alternée.

Suggestion: pour $v_i, v_j \in V$ mettre $v_i + v_j$ dans les positions i et j pour $i \neq j$. Alors

$$\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_k) = 0.$$

Utiliser la multi-linéarité.

4. Soit S_3 le groupe de permutations de 3 nombres.

(a) Donner toutes permutations dans S_3.

(b) Calculer la signature de toute permutation dans S_3

(c) Calculer pour toutes $\sigma \in S_3$ son inverse $\sigma^{-1} \in S_3$, $\ (\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = id)$.

(d) Vérifier que $sign(\sigma) = sign(\sigma^{-1})$, $\forall \sigma \in S_3$.

(e) Vérifier que $sign(\sigma \circ \sigma') = sign(\sigma) sign(\sigma')$, $\forall \sigma \in S_3$.

5. Calculer le déterminant

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{pmatrix} .$$

6. Utiliser les déterminants pour les problèmes suivantes

(a) Pour quelles valeurs de α les vecteurs

$$v_1 = {}^t(1, -1, 0, 2), \quad v_2 = {}^t(1, 0, 1, 2), \quad v_3 = {}^t(1, 3, 5, 7), \quad v_4 = {}^t(0, 2, 3, \alpha),$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

(b) Pour quelles valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$${}^t(2, \mu, 1), \quad {}^t(\lambda, 0, 1), \quad {}^t(\mu, \lambda, 0) \quad \in \mathbb{R}^3,$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo`