

Martin Schlichenmaier  
 Université du Luxembourg

## Géométrie et Algèbre Linéaire 2

### Feuille d'exercices 5

**1.** Rappelez que on a  $\det {}^t A = \det A$ .

(a) Soit  $A$  une matrice carrée de ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que

$$\det(-A) = (-1)^n \det A.$$

(b) Soit  $A$  une matrice anti-symétrique (i.e. on a  ${}^t A = -A$ ) carrée d'ordre  $n$  avec  $n$  impair. Démontrer que  $A$  n'est pas inversible.

(c) Est-ce que l'assertion (b) est aussi vrai pour  $n$  pair?

(d) Soit  $A$  une matrice anti-symétrique. Quelles valeurs sont possible pour  $\text{tr}(A)$ ?

**2.** Déterminer les déterminants pour les matrices  $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

**3.** Soient

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

avec  $\det(A) \neq 0$ , et  $x$  la solution de l'équation  $Ax = b$ . Donner  $x_1$  et  $x_2$  comme des fonctions des éléments  $a_{ij}$  et  $b_i$ . Soit maintenant le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Les fonctions sont-elles continues et/ou différentiable?

**4.** Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

est-elle inversible? Calculer, dans ce cas, son inverse. (Utiliser le déterminant.)

**5.** Calculer le déterminant pour la matrice

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix}.$$

**6.** Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

**7.** Soient  $A \in M_k(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{n-k}(\mathbb{R})$  et  $B$  une matrice du type  $(k, n-k)$ . Soit  $D$  la matrice composé  $D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\det(D) = \det(A) \cdot \det(C)$ .

**8.** (a) Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ ? Si oui, donner les matrices diagonales et les matrices du passage.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Quelle sont les interprétations géométriques de ces applications?

(c) Faire la même que dans (a) sur le corps  $\mathbb{C}$ .

**9.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice réelle avec  $b \cdot c > 0$ . Démontrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .