

Martin Schlichenmaier  
 Université du Luxembourg

## Géométrie et Algèbre Linéaire

### Feuille d'exercices 4

**1.** Soit  $\psi$  l'application

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \psi(x) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Montrer que  $\psi$  est linéaire. Déterminer les dimensions de  $\text{im } \psi$  et de  $\ker \psi$ . Donner une base du  $\ker \psi$ .

**2.** Soit  $\text{tr}$  l'application trace

$$\text{tr} : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mapsto \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Montrer que  $\text{tr}$  est linéaire. Déterminer les dimensions de  $\text{im } \text{tr}$  et  $\ker \text{tr}$ . Donner une base du  $\ker \text{tr}$ .

**3.** Les applications suivantes sont-elles linéaires?

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (3x + 2y, x), \\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}, \\ \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto \bar{z}, \quad \text{sur le corps } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**4.** Soit  $V$  un espace vectoriel. (a) Soit  $f : V \rightarrow V$  une application linéaire bijective. Montrer que  $f^{-1}$  est aussi linéaire.

(b)  $\text{Aut}(V)$  est l'ensemble des applications linéaires bijectives  $V \rightarrow V$ . Montrer que (avec la composition des applications)  $\text{Aut}(V)$  est un groupe.

**5.** Soit  $f : V \rightarrow V$  une application linéaire. Et soit  $v \in V$  un vecteur tel que

$$\text{il existe } n \in \mathbb{N} : \quad f^n(v) \neq 0, \quad f^{n+1}(v) = 0.$$

Montrer que la famille

$$\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v), f^n(v)\}$$

est libre.

**6.** Soit  $f : V \rightarrow V$  une application linéaire. Soit

$$\text{Fix } f := \{v \in V \mid f(v) = v\}$$

l'ensemble de points fixes de  $f$ .

- (a) Montrer que  $\text{Fix } f$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- (b) Déterminer  $\text{Fix } f$  pour

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

- (c) Déterminer  $\text{Fix } D$  pour

$$D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto P'.$$

- (d) Déterminer  $\text{Fix } D$  pour

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad h \mapsto h'.$$

**7.** Soit  $f : V \rightarrow V$  une application linéaire avec  $f^2 = f$ . Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels  $U$  et  $W$  tels que

$$V = U \oplus W, \quad f(W) = 0, \quad f(u) = u, \forall u \in U.$$

**8.** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire surjective. Soit pour  $w \in W$

$$f^{-1}(w) := \{v \in V \mid f(v) = w\}.$$

Montrer qu'il existe un  $v_0 \in V$  tel que  $f^{-1}(w) = v_0 + \ker f$ . Est-ce que  $v_0$  est unique?

Les pages de web du cours: <http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo>