Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 5

1. (a) Soient V un espace vectoriel de dimension finie et $f : V \to V$ une application linéaire. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) f est bijective
(2) f est injective
(3) f est surjective.

Suggestion: On regarde la relation $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

(b) Est-ce que c'est aussi vrai si la dimension de V est infinie?
Suggestion: On regarde $V = \mathbb{R}[X]$ et f la dérivé.

2. Soit $f : V \to W$ une application linéaire. Soit M un sous-ensemble de V. Rappeler que $\langle M \rangle$ est le sous-espace vectoriel de V engendré par les éléments dans M. Vérifier

$$f(\langle M \rangle) = \langle f(M) \rangle.$$

3. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Soit $\{v_k \in V,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ une base de V fixée. Soient donnés $a_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
Vérifier que l'application

$$\varphi : V \to \mathbb{K}, \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mapsto \varphi(v) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

est linéaire.

4. Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : V \to V$ une application linéaire. Démontrer que

$$V_+ := \{v \in V \mid \varphi(v) = v\}, \qquad V_- := \{v \in V \mid \varphi(v) = -v\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de V et que $V_+ \cap V_- = \{0\}$.

5. Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard de $\mathbb{R}^3$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire uniquement donné par

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Quelle est le rang de φ (le rang est la dimension de im φ) ?

(b) Quelle est la dimension de noyau de φ.

(c) Calculer le noyau de φ, (noté par $\ker \phi$).

(d) Calculer $\varphi(v)$ et $\varphi(w)$ pour

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(e) Déterminer $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle$.

6. Donner V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Vérifier que l'ensemble $L(V, W)$ des applications linéaires est un espace vectoriels sur $\mathbb{K}$ si on prend la définition des opérations point-par-point. C.à.d. pour $\varphi, \psi \in L(V, W)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, les applications $\varphi + \psi$ et $\alpha\varphi$ sont définies comme suivantes:
Pour chaque $v \in V$ on prend

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v), \qquad (\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v)).$$

7. Existe-t-il des application linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$? des application linéaires surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$? Généraliser.

8. Soit V un espace vectoriel, et $p : V \to V$ une application linéaire. On appelle p *projecteur* si $p^2 := p \circ p = p$.

(a) Montrer que si p est un projecteur alors: $V = \ker p \oplus \operatorname{im} p$.

(b) Soit $q = id - p$. Vérifier que q est aussi un projecteur et que $\ker p = \operatorname{im} q$. Alors $V = \operatorname{im} p \oplus \operatorname{im} q$.

(c) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Soit W un sous-espace de dimension k. On prend une base $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ quelconque de W et on augmente cette base par des vecteur $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ pour obtenir une base de V.
Démontrer que l'application linéaire

$$\phi : V \to V, \qquad v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \quad \mapsto \quad \phi(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i,$$

et un projecteur. Quels sont les sous-espace vectoriel $\operatorname{im} \phi$ et $\ker \phi$. Ces sous-espaces sont-t-ils dépendants de choix de la base dans W et/ou de l'augmentation?

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo`