Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 6

1. On donne les systèmes d'équations linéaires suivants. Dans chaque cas répondre aux questions suivantes. Est-ce qu'il existe une solution? Si oui, déterminer l'ensemble de solutions. (En utilisant l'algorithme de Gauss **!!**)

(a)

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} .$$

(b)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & = & 2 \end{array} .$$

(c)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} .$$

(d)

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 10y & - & 8z & + & 11w & = & 12 \end{array} .$$

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

(a) n'a pas de solution; (b) a une infinité de solutions; (c) a une solution unique. (Il n'est pas necessaire de déterminer l'ensemble de solutions.)

3. Pour quelles valeurs de a, b, c le système suivant admet-il au moins une solution?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 3x & + & 8y & - & 14z & = & b \\ 2x & & & + & 4z & = & c \end{array} .$$

4. Soit $t \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. Déterminer l'ensemble de solutions L_t du système des équations linéaires

$$\begin{array}{rcccccl} x & + & t \cdot y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & (1-t) \cdot y & - & z & = & 1 \\ x & + & (1+t) \cdot y & + & (t^2+4)z & = & (t+2) \end{array} ,$$

dépendante de la valeur de t. Pour préciser,

$L_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z)$ est une solution du système avec le paramètre t qui est fixé$\}$.

5. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & + & 5x_4 & = 0 \end{array} .$$

6. Donner les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \qquad W_t = \langle x, y, z \rangle$$

avec t un paramètre réel et les vecteurs

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2+t \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer $\dim W_t$ dépendante de la valeur de t.
(b) Donner une base de W_t qui est un sous-ensemble de $\{x, y, z\}$.
(c) Calculer la dimension et une base de $U_t := V \cap W_t$.

7. (a) Pour quelles valeurs de α les vecteurs

$$v_1 = {}^t(1,-1,0,2), \quad v_2 = {}^t(1,0,1,2), \quad v_3 = {}^t(1,3,5,7), \quad v_4 = {}^t(0,2,3,\alpha),$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?
(b) Dans les cas où la famille est liée, déterminer les relations linéaires qui lient ces vecteurs. Quelle est la dimension de l'espace engendré?
(c) Soit $v = {}^t(-2,k,1,3)$. Pour quelles valeurs de k le vecteur $v \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$? Déterminer, dans ce cas, les composantes de v dans une base de $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo`