Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 7

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
une matrice du type carrée. Est-ce que cette matrice est inversible? Si oui, calculer la matrice inverse A^{-1}.

2. Soit A la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
(a) Montrer que la matrice A est du rang ≤ 1 sii $ad - bc = 0$.
(b) Si le rang de A est 2, calculer la matrice inverse de A.

3. Soit A la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Déterminer la matrice inverse A^{-1}.

4. Soit A la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer la matrice A^{-1}.

5. Soit A la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
Déterminer la matrice A^{-1}.

6. Soient $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$.
(a) Montrer que

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}), \qquad {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA, \qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

(b) Soit A une matrice qui est symétrique (i.e. ${}^tA = A$) et inversible. Montrer que A^{-1} est aussi symétrique.

7. Soient V un espace vectoriel de dimension finie et W un sous-espace.
(a) Donner une application linéaire $p : V \to V$ telle que $p \circ p = p$, im $p = W$ et $p_{|W} = id_W$ (c.à.d. $\forall x \in W : p(x) = x$).
(Utiliser le fait qu'une application linéaire peut uniquement donner par les images des vecteurs d'une base.)

(b) Déterminer $\dim \ker p$, $\dim \mathrm{im}\, p$, et les sous-espaces $\ker p$ et $\mathrm{im}\, p$.

(c) Démontrer que on a pour l'application $q = id_V - p$ la relation $q \circ q = q$. Déterminer $\dim \ker q$, $\dim \mathrm{im}\, q$, et les sous-espaces $\ker q$ et $\mathrm{im}\, q$.

8. Soit donné une matrice carrée $A \in Mat_n(\mathbb{K})$. Une valeur $\lambda \in \mathbb{K}$ est dite valeur propre de A s'il existe un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, tel que on a

$$A \cdot x = \lambda x.$$

Le vecteur x est dit vecteur propre de A.
Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer toutes ses valeurs propres et tous ses vecteurs propres.

9. Soit $M_3(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3. L'application linéaire tr est définit comme

$$\mathrm{tr} : M_3(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad A = (a_{ij}) \to tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Choisir des bases B dans $M_3(\mathbb{K})$ et B' dans $\mathbb{K}$ et donner une description matricielle $M_{B,B'}(\mathrm{tr})$.

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/geo`