Exercices Principe de tiroirs

1. Tu est à la fête de fin d'année de ton lycée... à la fin de cette fête tu as peut-être serré la main de tout le monde, de quelques personnes ou de personne...
   (on ne peut pas se serrer la main à soi-même et serrer la main de quelqu'un à plusieurs reprises ne compte pas).
   Peut-on trouver deux personnes différentes dans la fête qui ont serré la main du même nombre de personnes ? Pourquoi ? Est-ce qu'il y a un autre fêtard qui a serré autant de mains que toi ?

   C'est la devinette classique du "serrage de main". A priori, il n'est pas exclu que l'on soit seul à la fête mais c'est un cas assez spécial (et un peu triste) auquel cas la réponse est clairement "non" aux deux questions. On suppose donc maintenant qu'il y a N personnes à cette fête où $N > 1$.

   Peut-être avez vous serrez la main de tout le monde à la fête (parce qu'elle se passe chez vous par exemple) et que personne d'autre n'a serré la main de tout le monde. Dans ce cas, personne n'a serré autant de mains que vous. La réponse à la seconde question est donc clairement "non".

   On définit maintenant un "tiroir" comme un nombre entre 0 et $N-1$. Ce nombre doit être compris comme le nombre de personnes à qui l'on serre la main à la fête. Une personne à la fête sera vue comme une "chaussette". Nous avons N "tiroirs" et N "chaussettes" donc le principe des tiroirs ne nous est d'aucune utilité pour l'instant. Mais, en réfléchissant un peu, on ne peut pas simultanément avoir une chaussette dans le tiroir 0 et une chaussette dans le tiroir $N-1$ car cela signifierait que l'on ait une personne x à la fête qui a serré la main de tout le monde et une personne y qui n'a serré la main de personne ce qui est impossible car x et y ont du se serrer la main. Par conséquent on a, en réalité, $N-1$ tiroirs : de 0 à $N-2$ ou de 1 à $N-1$.

   Le principe des tiroirs s'applique donc maintenant à nos N "chaussettes" et nos $N-1$ "tiroirs" : il existe un tiroir contenant deux chaussettes, autrement dit, il existe un nombre n et deux personnes telles que ces deux personnes ont serré la main de exactement n personnes.

2. Être funambule, ça demande de l'entrainement et une sangle sur laquelle marcher en équilibre. Heureusement, vous pouvez pratiquer dans un jardin (ce jardin est un carré) dans lequel il y a cinq arbres et vous avez une sangle à votre disposition. Votre sangle fait quelques mètres de plus que la moitié de la diagonale du jardin.
   Est-il possible de tendre votre sangle entre deux de ces arbres pour vous entrainer ?

   On divise le carré en quatre petits carrés. Le principe des tiroirs (puisque $5 > 4$) affirme que l'on peut trouver 2 arbres dans un de ces quatre petits carrés. La distance entre ces deux arbres est alors inférieure à la diagonale d'un des petits carrés qui est la moitié de la diagonale du jardin.

3. Que peut-on faire quand on a perdu ses pièces d'échec et que l'échiquier a perdu deux cases diagonalement opposées ? On peut jouer aux dominos, bien sûr !
   Essayez de recouvrir l'échiquier en question avec des dominos (un domino recouvre deux cases exactement)... Est-ce même possible ?

   Pour recouvrir l'échiquier, nous devons utiliser 31 dominos. On remarque, en préambule, que chaque domino recouvre deux cases : une blanche et une noire.

   L'échiquier quant à lui a perdu deux cases diagonalement opposées qui sont d'une même couleur, soit blanche soit noire. La couleur n'importe pas, supposons donc que l'on ait 32 cases noires sur l'échiquier (et donc 30 blanches).

   Considérons les 32 cases noires comme les "chaussettes" et les 31 dominos comme les "tiroirs". Une chaussette appartient à un tiroir si la case noire correspondante est recouverte par le domino correspondant. Le principe des tiroirs permet alors d'affirmer que si l'on pouvait recouvrir toutes les cases avec 31 dominos alors deux cases noires seraient nécessairement recouvertes par un même domino, ce qui est impossible !

4. Le jeux des neufs nains se joue avec huit cartes : la première représente un nain, la deuxième deux nains... et la dernière huit nains. Vous avez gagné le jeux lorsque vous tenez en main au moins deux cartes dont la somme des nains est égale à neuf. *Montrer que si vous avez cinq cartes en main, vous avez nécessairement une main gagnante.*

   Divisons les cartes en quatre paires gagnantes (que l'on considérera comme quatre "tiroirs") :

   $$\{1,8\} \qquad \{2,7\} \qquad \{3,6\} \qquad \{4,5\}$$

   Les cinq cartes de notre mains seront nos "chaussettes". Le principe des tiroirs permet alors d'affirmer que deux cartes se trouvent nécessairement dans un même ensemble ci-dessus. Ainsi, j'ai forcément dans ma main une paire gagnante.