Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistiques 1

Examen du mardi 2 février 2021 durée: 14h00–16h00 (2 heures)

---

1. `(5 points)`

   En Russie 30 % de la population fume. Parmi les gens qui fument 40 % aussi boivent, par contre parmi les gens qui ne fument pas seulement 20 % boivent.

   (a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les gens qui boivent soit un fumeur ?

   (b) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard ne fume pas et ne boive pas ?

   (c) Fumer et boire sont-ils des événements indépendants en Russie ?

2. `(5 points)`

   Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ une expérience de Laplace, c.à.d. Ω est un ensemble fini, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties des Ω et $\mathbb{P}$ est la loi uniforme sur $(\Omega, \mathscr{A})$,

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad A \in \mathscr{A}.$$

   Supposons que le cardinal $p := |\Omega|$ de Ω est un nombre premier.

   Montrer que si $A, B \in \mathscr{A}$ sont indépendants, alors on a que $A \in \{\varnothing, \Omega\}$ ou $B \in \{\varnothing, \Omega\}$.

3. `(5 points)`

   Soit N une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

   (a) Montrer que

   $$\mathbb{E}[Nf(N)] = \lambda \mathbb{E}[f(N+1)],$$

   pour toute fonction $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\mathbb{E}[Nf(N)] < \infty$ et $\mathbb{E}[f(N+1)] < \infty$.

   (b) En déduire que pour tout entier $k \geq 1$,

   $$\mathbb{E}[N^k] = \lambda \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} \mathbb{E}[N^n].$$

4. `(5 points)`

   Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. Pour faire cela, on effectue un prélèvement de N pièces, sélectionnées de manière indépendante. On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que X_N/N approche p pour N grand.

   (a) Quelle est la loi de X_N ?

   (b) Trouver $\mathbb{E}[X_N]$ et $\mathrm{var}(X_N)$.

   (c) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_N}{N} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

   (d) En déduire une condition sur N pour que X_N/N soit proche de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 95%.