Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Feuille de TD n° 2 2020-21

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E_i, $i \geq 1$ une suite dans $\mathscr{A}$. Démontrez que si $\mathbb{P}(E_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$, alors
$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{i\geq 1} E_i\big) = 1.$$

2. Le jeu poker d'as se joue avec 5 dés à 6 faces. Calculez les probabilités suivantes:

   (a) $\mathbb{P}\{$"pas deux dés pareils"$\} = 0{,}0926$

   (b) $\mathbb{P}\{$"une paire"$\} = 0{,}4630$

   (c) $\mathbb{P}\{$"deux paires"$\} = 0{,}2315$

   (d) $\mathbb{P}\{$"trois dés identiques"$\} = 0{,}1543$

   (e) $\mathbb{P}\{$"full house, i.e., une paire et un triple"$\} = 0{,}0386$

   (f) $\mathbb{P}\{$"quatre dés identiques"$\} = 0{,}0193$

   (g) $\mathbb{P}\{$"cinq dés identiques"$\} = 0{,}0008$

3. Le jeu dit "craps" se joue de la façon suivante: un joueur lance deux dés. Si la somme fait $2, 3$ ou 12 il perd, si la somme fait 7 ou 11 il gagne. Si la somme est un autre nombre i, le joueur relance les deux dés jusqu'à ce que la somme fasse 7 ou i. Si la somme 7 apparaît en premier il perd, tandis qu'il gagne si la somme fait i. Calculez la probabilité que le joueur gagne à craps.

   Indication: Soit E_i l'événement que le total du premier lancer vaut i et que le joueur gagne. Argumentez que
$$\mathbb{P}\{\text{“le joueur gagne”}\} = \sum_{i=2}^{12} \mathbb{P}(E_i).$$

   Ensuite, argumentez que l'on peut écrire
$$\mathbb{P}(E_i) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(E_{i,n})$$

   où $E_{i,n}$ représente l'événement que la somme initiale vaut i et que le joueur gagne au n-ième lancer.

4. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E_i, $i \geq 1$ une suite dans $\mathscr{A}$. Montrez l'inégalité de Bonferroni:
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i).$$