Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique

Feuille de TD n° 3 2020-21

---

1. Un étudiant sait répondre correctement à 18 questions sur les 20 questions d'un examen. La note 20 lui sera attribuée si et seulement si il donne une réponse correcte à 4 questions choisies au hasard. Calculer la probabilité que l'étudiant ait la note 20.

2. (*Comment compter les poissons dans un étang ?*) 100 truites ont été capturées dans un étang, marquées et remises dans l'étang. Le nombre total de poissons dans l'étang est inconnu. Lorsque l'on capture de nouveau 100 truites, on en trouve 7 déjà marquées. Quelle est la probabilité de ce résultat si l'étang contient en tout n truites? Pour quel n ce résultat est-il le plus vraisemblable?

3. Soient les événements A et B tels que $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,85$, $\mathbb{P}(A) = 0,7$ et $\mathbb{P}(B) = 0,5$.
A et B sont-ils indépendants?

4. (*Fille ou garçon?*)
   (a) Une famille a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon?
   (b) Une famille a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon?

5. Bernard vient en cours deux fois sur trois, et quand il vient, il arrive une fois sur deux à l'heure, les autres fois il a au moins vingt minutes de retard. Il est 8h40, le cours commence à 8h30. Quelle chance a le professeur de voir encore arriver Bernard?

6. (*Cours de Probabilités et Statistiques*) On estime qu'une personne ayant correctement révisé ses cours pour cet examen a une probabilité de 20 % d'échouer à l'examen. En revanche, on estime qu'une personne n'ayant pas révisé ses cours a une probabilité de 60% d'échouer à cet examen. On sait aussi que 50 % des personnes ont correctement révisé leurs cours et 50 % n'ont pas correctement révisé leurs cours. Une personne passe deux fois de suite cet examen et échoue par deux fois mais affirme pourtant avoir parfaitement révisé. Est-ce plausible?

7. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
   (a) Soit $A_1, \ldots, A_n$ une suite finie d'événements telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$.
   Montrer qu'on a:
   $$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$
   (b) Soit $B_1, \ldots, B_n$ une suite finie d'évènements, deux à deux disjoints, et $\mathbb{P}(B_i) > 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Pour tout $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A \mid B_1) = \mathbb{P}(A \mid B_2) = \ldots = \mathbb{P}(A \mid B_n)$, on a:
   $$\mathbb{P}(A \mid B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \mathbb{P}(A \mid B_i).$$

8. (*Formule de Bayes*) Une fête a lieu dans les quatre salles I, II, III, IV d'un club étudiant. Une étudiante cherche un autre étudiant. Elle sait que la probabilité que cet étudiant participe à la fête est égale à p, et s'il attend, la probabilité d'être dans une certaine pièce est $1/4$.

   (a) Quelle est la probabilité que l'étudiante rencontre l'étudiant dans la pièce III ?

   (b) Quelle est la probabilité qu'elle le rencontre dans la pièce IV, si elle ne pouvait pas le trouver dans les pièces I − III ?