Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Probabilités et Statistique

Feuille de TD n° 4 2020-21

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\Omega \subset \mathbb{R}$ dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le nombre

$$m(\mathbb{P}) = \sum_{\omega \in \Omega} \omega\, p(\omega)\,, \quad p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}),$$

(s'il existe) s'appelle la *valeur moyenne* de $\mathbb{P}$. Montrer que:

a) si $\mathbb{P}$ est la loi de Poisson de paramètre λ sur $\mathbb{N}$, alors on a $m(\mathbb{P}) = \lambda$.
b) si $\mathbb{P}$ est la loi binomiale de paramètres p et n sur $\{0, \dots, n\}$, alors $m(\mathbb{P}) = np$.
c) si $\mathbb{P}$ est la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$, alors $m(\mathbb{P}) = 1/p$.

2. A la cantine, il y a des spaghettis accompagnés de morceaux de jambon. De combien de morceaux de jambon a-t-on besoin en moyenne dans une portion, pour qu'en moyenne seulement une portion sur 100 soit sans jambon ? (On modélisera le nombre de morceaux de jambon dans une portion par une loi de Poisson.)

3. (*Urne de Pólya*) Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard, on note sa couleur, et on la remet avec d boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire.

(a) Trouver la probabilité pour que

i. La seconde boule tirée soit noire.

ii. La première boule est noire, sachant que la seconde est noire.

(b) On note N_k l'événement selon lequel la k-ième boule tirée est noire. Montrer que $\mathbb{P}(N_k) = \mathbb{P}(N_1)$.

(c) Trouver la probabilité pour que la première boule soit noire, sachant que les $k-1$ suivantes sont noires; trouver la limite de cette probabilité lorsque $k \to \infty$.

4. Soit Ω un espace dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, le nombre

$$H(\mathbb{P}) = -\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \log p(\omega) \in [0, \infty]$$

s'appelle l'*entropie* de $\mathbb{P}$. (On observe que la fonction $u(x) = x \log x$, avec $u(0) := 0$, est continue sur $\mathbb{R}_+$ et qu'on a $u(x) \geq x - 1$ pour tout $x \geq 0$.)

a) Étant donné deux probabilités $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ sur Ω, considérer

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) := \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) \log(q(\omega)/p(\omega)).$$

On vérifiera que $0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \leq \infty$, et $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0$ si et seulement si $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$.

b) Soit $\operatorname{card}(\Omega) < \infty$. Parmi toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur Ω, montrer que la loi uniforme a l'entropie maximale.

c) Soient $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mu \in \,]1, \infty[$. Parmi toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur Ω de valeur moyenne $m(\mathbb{P}) = \mu$, montrer que la loi géométrique de paramètre $p = 1/\mu$ a l'entropie maximale.

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = \big\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \,|\, \omega_1, \ldots, \omega_n \in \{0, 1\}\big\}$, $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$ et $\mu \in \,]0, n[$. Parmi toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur Ω avec $\sum_{\omega \in \Omega} S_n(\omega)\, p(\omega) = \mu$, montrer que la loi $p(\omega) := p^{S_n(\omega)}(1-p)^{n-S_n(\omega)}$ où $p = \mu/n$, a l'entropie maximale.