Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Probabilités et Statistique

Feuille de TD n^{o} 5 2020-21

1. On considère dans une urne quatre billets notés respectivement 110, 101, 011 et 000. On tire au sort un billet dans l'urne et on considère les trois événements

$$A_i = \big\{\text{le } i\text{-ième chiffre du billet tiré est } 1\big\}\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

   (a) Les événements A_1, A_2, A_3 sont-ils indépendants deux à deux?

   (b) Sont-ils indépendants?

2. Soient A et B deux événements indépendants tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$.

   Montrer que les événements A, B et $C = A \triangle B$ sont indépendants deux à deux.

   Les événements A, B, C sont-ils indépendants?

3. Montrer que la relation d'indépendance n'est *pas* transitive.

4. Soit Ω l'ensemble des huit issues résultant de trois jets consécutifs d'une pièce de monnaie. On considère les deux événements:

   A "la première pièce amène pile";

   B "pile est amené au moins deux fois".

   (a) Les événements A et B sont-ils indépendants, si l'on munit Ω de l'équirépartition?

   (b) Existe-t-il une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que A et B soient $\mathbb{P}$-indépendants?

5. (*Indépendance conditionnelle*)

   Deux événements A et B sont dits *indépendants conditionnellement* à un événement C si $\mathbb{P}(A \cap B \,|\, C) = \mathbb{P}(A \,|\, C)\,\mathbb{P}(B \,|\, C)$. Montrer que A et B peuvent être indépendants, et ne plus l'être conditionnellement à un événement C.

6. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements indépendants. On suppose que l'ensemble I est partitionné en deux parties I_1 et I_2. Soit $(B_i)_{i \in I}$ la famille d'événements définis par:

$$B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } \ i \in I_1, \\ A_i^c & \text{si } \ i \in I_2. \end{cases}$$

   Montrer que alors la famille $(B_i)_{i \in I}$ est aussi indépendante.