

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Probabilités et Statistique

Feuille de TD n° 6

2020-21

1. La variable aléatoire X suit une loi binômiale avec

$$\mathbb{E}[X] = 6 \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = 4.$$

Déterminer les paramètres de cette loi binômiale.

2. Soit X une v.a. réelle avec un moment d'ordre deux fini, c.à.d. $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Montrer les conditions suivantes:

(a) L'espérance $\mathbb{E}[X]$ et la variance $\text{var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ de X existent et sont finies, et l'on a $\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

(b) Pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité:

$$\mathbb{E}[(X - a)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

3. Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $p_n = \mathbb{P}\{X = n\} > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, les deux propriétés sont équivalentes:

a) X suit la loi de Poisson de paramètre λ ;

b) Pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$.

4. Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N}^* . Montrer que les deux propriétés sont équivalentes:

a) X suit une loi géométrique;

b) $\mathbb{P}\{X > k+n \mid X > n\} = \mathbb{P}\{X > k\}$ pour tous les $n, k \in \mathbb{N}^*$ (“ X est sans mémoire”).

5. Monsieur Dupont provoque avec sa voiture en moyenne 0.5 accidents chaque année.

(a) Quelle est la probabilité qu'il ait au moins 1 accident dans une année?

(b) Quelle est la probabilité qu'il ait 2 accidents dans une année?

Modéliser à l'aide de la loi de Poisson.

6. (a) Un homme et une femme veulent mettre au monde des enfants, jusqu'à avoir un enfant de chaque sexe. Quelle est le nombre attendu d'enfants?

(Nous ignorons la possibilité de naissances multiples, nous supposons que les expériences sont indépendantes, et qu'à chaque naissance la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille.)

(b) Après une nuit de beuverie, un étudiant en probabilité veut remettre ses n CDs dans leurs pochettes respectives. Pour chaque CD mis dans sa pochette, il reçoit 1 Euro de son ami. Malheureusement, il ne peut travailler que de manière complètement arbitraire. Est-ce que le gain attendu peut lui permettre de se payer un repas à la cantine si $n = 5$, respectivement $n = 100$?