**Bachelor académique en Sciences et Ingénierie**
Probabilités et Statistique

Feuille de TD n° 7 2020-21

---

1. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $\mathbb{E}[X] < \infty$ si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}\{X > n\}$ converge. Montrer qu'alors:
   $$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\{X > n\}.$$

   (b) Déduire l'espérance d'une variable géométrique de paramètre $p$.

2. Si $g\colon [0, \infty[ \to [0, \infty[$ est strictement croissante, montrer que
$$\mathbb{P}\big\{|X| > a\big\} \leq \frac{\mathbb{E}\big[g(|X|)\big]}{g(a)} \quad \text{pour } a > 0\,.$$

3. Dans une urne, se trouvent $n$ boules semblables, qui sont numérotées de 1 à $n$. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne. On note $X$ le numéro de la première boule tirée et $Y$ le numéro de la deuxième.

   Calculer la covariance $\operatorname{cov}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation $\rho(X, Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. Pourquoi le signe négatif est-il attendu?

   *Indication:* Utiliser que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Soit $X$ une variable aléatoire. On appelle *médiane* de $X$ tout nombre $M$ vérifiant:
$$\mathbb{P}\{X \leq M\} \geq \frac{1}{2}\,, \quad \mathbb{P}\{X \geq M\} \geq \frac{1}{2}\,.$$

   Montrer les assertions suivantes:

   (a) Toute variable aléatoire $X$ admet au moins une médiane.

   (b) Soit $X$ une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{E}|X| < \infty$. Si $M$ est une médiane de $X$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité:
   $$\mathbb{E}|X - a| \geq \mathbb{E}|X - M|\,.$$

   L'expression $\mathbb{E}|X - M|$ prend la même valeur pour toute médiane $M$ de $X$; cette valeur commune est appelée *écart médian* de $X$.

   (c) L'écart médian est majoré par l'écart-type.