Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique

Feuille de TD n° 8 2020-21

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}\{X_i = 1\} = \mathbb{P}\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}\,.$$

Montrer que les variables X_1, X_2 et $X_3 = X_1X_2$ sont indépendantes deux à deux.
Les variables X_1, X_2, X_3 sont-elles indépendantes?

2. (*Indépendance*)

   (a) Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite finie de variables aléatoires indépendantes et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que les variables $\varphi_1 \circ X_1, \dots, \varphi_n \circ X_n$ sont indépendantes.

   (b) Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite finie de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
   Montrer qu'on a alors $\mathbb{E}\prod_{i=1}^n |X_i| < \infty$, et que $\mathbb{E}\prod_{i=1}^n X_i = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$.

   (c) Soit X une variable aléatoire et $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que X et $\varphi \circ X$ sont indépendantes si et seulement si $\varphi \circ X$ est constante presque sûrement.

   (d) Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes. Montrer que $X_1 + \ldots + X_n$ est constante presque sûrement si et seulement si tout X_i est constante presque sûrement.

3. Soient X_1, X_2 indépendantes et de lois de Poisson avec les paramètres λ_1 et λ_2:

$$\mathbb{P}\{X_i = k\} = e^{-\lambda_i}\frac{\lambda_i^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (i = 1, 2).$$

Alors on a:

   a) $X = X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

   b) La loi $\mathbb{P}\{X_1 = k \,|\, X = n\}$ de X_1 conditionnelle à $\{X = n\}$ est la loi binômiale avec les paramètres $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ et n.

4. Soient $X_1, X_2\colon\, \Omega \to \mathbb{N}$ des variables aléatoires indépendantes telles que

$$(*) \qquad \mathbb{P}\big\{X_1 = k \,\big|\, X_1 + X_2 = n\big\} = C_n^k\, 2^{-n}$$

pour tous les k, n avec $0 \le k \le n$.
Alors X_1 et X_2 suivent des lois de Poisson avec le même λ.

Indication. Vérifier la propriété suivante et utiliser ensuite Ex 3 (feuille 5):

$$\frac{\mathbb{P}\{X_1 = n \,|\, X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1 \,|\, X_1 + X_2 = n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X_1 = n\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 0\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 1\}} = \frac{1}{n}.$$

Explication. Pour illustrer la signification de l'énoncé, supposons que l'on observe les désintégrations d'une préparation radioactive. Soit X_1 le nombre de désintégrations dans l'intervalle $[0, T]$ et X_2 leur nombre dans $[T, 2T]$. Alors l'hypothèse $(*)$ signifie que chacune des n désintégrations dans $[0, 2T]$ a lieu avec la probabilité $1/2$ dans $[0, T]$, et avec la probabilité $1/2$ dans $[T, 2T]$, indépendamment des autres désintégrations.