Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD 1 2020-21

1. On jette trois dés non pipés : $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3 \Longrightarrow |\Omega| = 6^3 = 216$

(a) *Calculer la probabilité d'obtenir au moins un* 6.
On peut utiliser la formule de Poincaré :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)\\ - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3)\\ + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

avec les événements $A_i =$ "le i-ième jet donne 6", $i = 1, 2, 3$. En utilisant que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{6}\\ &\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{36}\\ &\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{216},\end{aligned}$$

on obtient:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{108 - 18 + 1}{216} = \frac{91}{216}.$$

Autre possibilité : On pose $A = \{$"au moins un 6"$\}$. Alors $A^c = \{1, \ldots, 5\}^3$ et $|A^c| = 5^3$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A^c|}{|\Omega|} = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}.$$

(b) *Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre.*
On regarde les événements

$$\begin{aligned}A &= \text{"2 dés marquent le même chiffre"}\\ A^c &= \text{"les 3 dés marquent des chiffres différents".}\end{aligned}$$

Alors $|A^c| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ (il y a 6 choix possibles pour le prémier chiffre, 5 pour le second chiffre et 4 pour le troisième). Donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{120}{216} = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

(c) *Calculer la probabilité que la somme des points marqués sur les trois faces soit paire.*
Soit $B \subset \Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$ l'événement "la somme des points est paire". L'application

$$\omega = (i, j, k) \stackrel{\varphi}{\longmapsto} (7 - i, 7 - j, 7 - k)$$

est une bijection de l'ensemble des (i, j, k) dans Ω de somme paire sur ceux de somme impaire. Par conséquent, $|B| = \frac{1}{2} |\Omega|$ et

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}.$$

2. Pour deux événements A et B on sait que

$$\mathbb{P}(A) = 0,25\ ; \quad \mathbb{P}(B) = 0,45\ ; \quad \mathbb{P}(A \cup B) = 0,5\,.$$

(a) D'abord on note

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,25 + 0,45 - 0,5 = 0,2\,.$$

Comme $A = (A \cap B) \,\dot{\cup}\, (A \cap B^c)$, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$, et donc

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,25 - 0,2 = 0,05\,.$$

(b) En utilisant que $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$, on obtient

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}\big((A^c \cap B^c)^c\big) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - 0,5 = 0,5\,.$$

(c) En utilisant que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, on obtient

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3\,.$$

3. *Avec quelle probabilité un nombre tiré au hasard dans* $\{1, \dots, 1000\}$ *n'est divisible ni par* 2, *ni par* 3, *ni par* 5 *?*

Soit $\Omega = \{1, \dots, 1000\}$ et $\mathbb{P}$ la loi uniforme sur Ω, c.à.d. $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{1000}$ $\forall n \in \Omega$.

Alors on a:

$$\begin{aligned} A_2 &:= \{n \in \Omega : 2|n\} \Longrightarrow \mathbb{P}(A_2) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2} \\ A_3 &:= \{n \in \Omega : 3|n\} \Longrightarrow \mathbb{P}(A_3) = \frac{333}{1000} \\ A_5 &:= \{n \in \Omega : 5|n\} \Longrightarrow \mathbb{P}(A_5) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}\,. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} A_2 \cap A_3 = \{n \in \Omega : 2|n \text{ et } 3|n\} = \{n \in \Omega : 6|n\} &\Longrightarrow \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{166}{1000} \\ A_2 \cap A_5 = \{n \in \Omega : 10|n\} &\Longrightarrow \mathbb{P}(A_2 \cap A_5) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10} \\ A_3 \cap A_5 = \{n \in \Omega : 15|n\} &\Longrightarrow \mathbb{P}(A_3 \cap A_5) = \frac{66}{1000} \\ A_2 \cap A_3 \cap A_5 = \{n \in \Omega : 30|n\} &\Longrightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_5) = \frac{33}{1000}\,. \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_5) &= \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_5) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_5) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_5) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_5) \\ &= \frac{500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33}{1000} = \frac{734}{1000}\,, \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{n \in \mathbb{N}^* : 2 \nmid n,\ 3 \nmid n,\ 5 \nmid n;\ n \le 1000\}) &= \mathbb{P}(A_2^c \cap A_3^c \cap A_5^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \frac{266}{1000} = 0,266\,. \end{aligned}$$

4. Quel nombre minimum d'enfants doit comprendre une famille, pour qu'il y ait un garçon avec une probabilité de 90 % (respectivement 99 %) ?

Pour n enfants, on utilise:

$$\Omega = \big\{(\omega_1, \dots, \omega_n) :\ \omega_i \in \{\male, \female\},\ i = 1, \dots, n\big\}$$

avec la loi uniforme

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^n} \quad \forall\, \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega\,.$$

Pour l'événement $A_n =$ "tous les n enfants sont des filles" $= \{(♀, \ldots, ♀)\}$ on obtient alors

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{|A_n|}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^n},$$

et donc

$$p_n := \mathbb{P}\{\text{“au moins un garçon”}\} = 1 - \mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{2^n}\,.$$

En particulier,

$p_1 = \frac{1}{2} = 0,5$
$p_2 = \frac{3}{4} = 0,75$
$p_3 = \frac{7}{8} = 0,875$
$p_4 = \frac{15}{16} = 0,9375$
$p_5 = \frac{31}{32} = 0,96875$
$p_6 = \frac{63}{64} = 0,984375$
$p_7 = \frac{127}{128} = 0,9921875$

Réponse Pour 90 % le nombre minimum est 4 enfants; pour 99 % le nombre minimum est 7 enfants.

5. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.

(a) $\mathbb{P}$ *vérifie la propriété de la continuité croissante*
Supposons que $A_n \uparrow$, c.à.d. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. On pose

$$B_1 := A_1 \quad \text{et} \quad B_n := A_n \setminus A_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Alors les $B_1, B_2, \ldots$ sont 2 à 2 disjoints et l'on a

$$B_1 \cup \ldots \cup B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_n \quad \forall\, n;$$

en particulier,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).\end{aligned}$$

(b) $\mathbb{P}$ *vérifie la propriété de la continuité décroissante*
Supposons que $A_n \downarrow$. Alors on a $A_n^c \uparrow$ et par (a) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Comme $\mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \mathbb{P}(A_n)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(c) $\mathbb{P}$ *est continue en* $\varnothing$

Supposons que $A_n \downarrow \varnothing$. Alors, par (b),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_n A_n\right) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

6. On jette 3 dés. Pour la modélisation on utilise

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{1, \ldots, 6\},\ i = 1, 2, 3\}$$

avec la loi uniforme sur Ω, c.à.d. $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{6\cdot 6\cdot 6} = \dfrac{1}{216} \quad \forall \omega \in \Omega.$

(a) L'événement $A :=$ "la somme est égale à 11" est constitué de la façon suivante:

6-4-1 $(6,4,1)$, $(6,1,4)$, $(4,6,1)$, $(4,1,6)$, $(1,6,4)$, $(1,4,6)$
6 événements élémentaires
6-3-2 6 événements élémentaires
5-5-1 $(5,5,1)$, $(5,1,5)$, $(1,5,5)$ 3 événements élémentaires
5-4-2 6 événements élémentaires
5-3-3 3 événements élémentaires
4-4-3 3 événements élémentaires

Par conséquent, on trouve

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216}\,.$$

(b) L'événement $B :=$ "la somme est égale à 12" est constitué de la façon suivante:

6-5-1 6 événements élémentaires
6-4-2 6 événements élémentaires
6-3-3 3 événements élémentaires
5-5-2 3 événements élémentaires
5-4-3 6 événements élémentaires
4-4-4 1 événement élémentaire

Par conséquent, on trouve

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216}\,.$$