Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD n^o 2 2020-21

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et E_i, $i \geq 1$ une suite dans $\mathscr{A}$. Démontrez que si $\mathbb{P}(E_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$, alors $\mathbb{P}(\cap_{i\geq 1} E_i) = 1$.

   Solution: Il suffit de démontrer $\mathbb{P}(\cup_{i\geq 1} E_i^c) = 0$. Ceci suit de l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} E_i^c\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E_i^c) = 0.$$

2. Le jeu poker d'as se joue avec 5 dés à 6 faces. Calculez les probabilités suivantes:

   (a) $\mathbb{P}\{$"pas deux dés pareils"$\} = 0,0926$;

   (b) $\mathbb{P}\{$"une paire"$\} = 0,4630$;

   (c) $\mathbb{P}\{$"deux paires"$\} = 0,2315$;

   (d) $\mathbb{P}\{$"trois dés identiques"$\} = 0,1543$;

   (e) $\mathbb{P}\{$" full house, i.e., une paire et un triple"$\} = 0,0386$;

   (f) $\mathbb{P}\{$"quatre dés identiques"$\} = 0,0193$;

   (g) $\mathbb{P}\{$"cinq dés identiques"$\} = 0,0008$.

   Solution:

   (a) Il y a 6^5 cas totaux et $6!$ cas favorables. La probablité est donc: $720/7776$.

   (b) Il y a $\binom{5}{2}$ façons de choisir une paire parmi 5 dés et $6!/2!$ possibilités de choisir 4 faces différentes. La probablité est donc: $3600/7776$.

   (c) Il y a $5!/(2!)^3$ façons de choisir deux paires parmi 5 dés et $6!/3!$ possibilités de choisir 3 faces différentes. La probablité est donc: $1800/7776$.

   (d) Il y a $\binom{5}{3}$ façons de choisir un triple parmi 5 dés et $6!/3!$ possibilités de choisir 3 faces différentes. La probablité est donc: $1200/7776$.

   (e) Il y a $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}$ façons de choisir une paire et un triple parmi 5 dés et $6!/4!$ possibilités de choisir 2 faces différentes. La probablité est donc: $300/7776$.

   (f) Il y a $\binom{5}{4}$ façons de choisir un quadruple 5 dés et $6!/4!$ possibilités de choisir 2 faces différentes. La probablité est donc: $150/7776$.

   (g) Il y a $6!/5!$ possibilités de choisir 1 face. La probablité est donc: $6/7776$.

3. Le jeu dit "craps" se joue de la façon suivante: un joueur lance deux dés. Si la somme fait $2, 3$ ou 12 il perd, si la somme fait 7 ou 11 il gagne. Si la somme est un autre nombre i, le joueur relance les deux dés jusqu'à ce que la somme fasse 7 ou i. Si la somme 7 apparaît en premier il perd, tandis qu'il gagne si la somme fait i. Calculez la probabilité que le joueur gagne à craps.

   Indication: Soit E_i l'événement que le total du premier lancer vaut i et que le joueur gagne. Argumentez que

$$\mathbb{P}\{\text{“le joueur gagne”}\} = \sum_{i=2}^{12} \mathbb{P}(E_i).$$

   Ensuite, argumentez que l'on peut écrire $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(E_{i,n})$ où $E_{i,n}$ représente l'événement que la somme initiale vaut i et que le joueur gagne au n-ième lancer.

   Solution: Vu que les événement $E_2, \ldots, E_{12}$ sont disjoints, on a

$$\mathbb{P}\{\text{“le joueur gagne”}\} = \sum_{i=2}^{12} \mathbb{P}(E_i).$$

   Remarquez que pour $2 \leq i \leq 12$: $E_{i,k} \cap E_{i,l} = \varnothing$ pour $k \neq l$ et donc

$$\mathbb{P}(E_i) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(E_{i,n}).$$

   Alors la probabilité que le joueur gagne est

$$\sum_{i=4}^{6} \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_7) + \sum_{i=8}^{10} \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_{11}).$$

   Il est facile de voir que $\mathbb{P}(E_7) = 6/36$ et $\mathbb{P}(E_{11}) = 2/36$. On sait que

$$\mathbb{P}(E_4) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(E_{4,n}).$$

   Suivant les règles du jeu on a que $\mathbb{P}(E_{4,1}) = 0$ et $\mathbb{P}(E_{4,n}) = \mathbb{P}\{$4 au premier lancer et ni 7 ni 4 du 2ième au (n-1)ième lancer et 4 au n-ième lancer$\}$ pour $n \geq 2$. Cette dernière probabilité, toujours pour $n \geq 2$, vaut $(3/36) \cdot (27/36)^{n-2} \cdot 3/36$. Donc $\mathbb{P}(E_4) = (3/36)^2 \cdot (36/9)$. Par symétrie, on a $\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(E_{10})$, $\mathbb{P}(E_5) = \mathbb{P}(E_9)$ et $\mathbb{P}(E_6) = \mathbb{P}(E_8)$. Par un raisonnement similaire l'on trouve $\mathbb{P}(E_5) = (4/36)^2(36/10)$ et $\mathbb{P}(E_6) = (5/36)^2 \cdot (36/11)$. La probabilité que le joueur gagne est $0,492929 < 0,5$. Le jeu n'est pas avantageux pour le joueur.

4. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E_i, $i \geq 1$ une suite dans $\mathscr{A}$. Montrer l'inégalité de Bonferroni:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i).$$

Solution: Tout d'abord observons que la borne supérieure est prouvée dans le polycopié. Il suffit donc de démontrer la borne inférieure. Nous procédons par induction: le cas $n = 2$ étant trivial. Supposons maintenant que la proposition est vraie pour n, nous la démontrerons pour $n + 1$. Soit $B := \cup_{i=1}^{n} E_i$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) = \mathbb{P}\left(B \cup E_{n+1}\right) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(E_{n+1}\right) - \mathbb{P}\left(E_{n+1} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right).$$

Par hypothèse nous avons

$$\mathbb{P}(B) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j).$$

En outre

$$\mathbb{P}\left(E_{n+1} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_{n+1} \cap E_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_i).$$

En combinant les deux inégalites l'on obtient l'assertion.