Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD 3 | 2020-21

1. *Un étudiant peut répondre correctement à 18 questions sur les 20 questions d'un examen.*

Comme il s'agit d'un tirage sans remise, il faut appliquer la loi hypergéométrique:

$$\mathscr{H}(k;m,n)(\ell) = \frac{\binom{m}{\ell}\binom{n-m}{k-\ell}}{\binom{n}{k}}, \quad \ell = 0,\dots,\min(m,k).$$

La note 20 lui sera attribuée, si et seulement si il donne une réponse correcte à 4 questions choisies au hasard. Calculer la probabilité que l'étudiant ait la note 20.

La probabilité que l'étudiant ait la note 20 est donnée par

$$\mathscr{H}(4;18,20)(4) = \frac{\binom{18}{4}\binom{2}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{18!}{14!\,4!}\Big/\frac{20!}{16!\,4!} = \frac{15\cdot 16}{19\cdot 20} \approx 0.63.$$

Note. La modélisation avec une loi binômiale donne un résultat légèrement différent. La probabilité d'une réponse correcte à une question est alors égale à $p := 18/20$, et la probabilité de ℓ réponses correctes, étant données k questions, s'écrit comme

$$\mathscr{B}(k;p)(\ell) = \binom{k}{\ell} p^\ell\,(1-p)^{k-\ell}.$$

La probabilité cherchée que l'étudiant ait la note 20 est donc

$$\mathscr{B}(4;p)(4) = \binom{4}{4} p^4\,(1-p)^{4-4} = \left(\frac{9}{10}\right)^4 \approx 0.65\,.$$

2. Le nombre n de poissons dans l'étang est inconnu. On effectue une première pêche de m poissons que l'on marque, puis que l'on relâche. Donc parmi les n poissons il y a m poissons marqués et $n-m$ non-marqués. Dans la deuxième pêche on capture k truites. Soit l'événement

$$A_\ell = \text{“exactement } \ell \text{ truites parmi les } k \text{ truites sont marquées”}, \quad \ell = 0,1,\dots,\min(m,k).$$

Alors on a

$$\mathbb{P}(A_\ell) = \frac{\binom{m}{\ell}\binom{n-m}{k-\ell}}{\binom{n}{k}}.$$

Pour $\ell = 7$, $k = 100$ et $m = 100$,

$$\mathbb{P}(A_7) = \frac{\binom{100}{7}\binom{n-100}{93}}{\binom{n}{100}} =: q_n.$$

Donc,

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{\binom{100}{7}\binom{n-100}{93}\Big/\binom{n}{100}}{\binom{100}{7}\binom{n-101}{93}\Big/\binom{n-1}{100}} = \frac{\binom{n-100}{93}\binom{n-1}{100}}{\binom{n-101}{93}\binom{n}{100}}$$

$$= \frac{(n-100)!^2\;(n-1)!\;93!\;(n-194)!\;100!}{(n-101)!^2\;n!\;93!\,(n-193)!\;100!} = \frac{(n-100)^2}{n(n-193)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} q_n > q_{n-1} &\iff (n-100)^2 > n(n-193) \\ &\iff 10\,000 > 7n \\ &\iff n < \frac{10\,000}{7}. \end{aligned}$$

On trouve que q_n est maximale pour $n = \left[\frac{10\,000}{7}\right] = 1428.$

3. Soient les événements A et B tels que $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.85$, $\mathbb{P}(A) = 0.7$ et $\mathbb{P}(B) = 0.5$.

Alors A et B sont indépendants. En fait, puisque

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.7 + 0.5 - 0.85 = 0.35 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)\,.$$

4. (a) *Une famille a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon?* On choisit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où

$$\Omega = \{(f,g),\ (f,f),\ (g,f),\ (g,g)\}$$

et $\mathbb{P}$ est la loi uniforme. La probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) \quad \text{où } A = \{(f,g),\ (g,f)\} \ \text{ et } \ B = \{(f,g),\ (f,f),\ (g,f)\}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}\,.$$

(b) *Une famille a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon?* On cherche

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) \quad \text{où } A = \{(f,g)\} \ \text{ et } \ B = \{(f,g),\ (f,f)\}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{1}{2}\,.$$

5. Considérons les événements

$$\begin{aligned} \mathrm{BV} &:= \text{“Bernard vient”}, \\ \mathrm{BV}^c &:= \text{“Bernard ne vient pas”}, \\ \mathrm{BR} &:= \text{“Bernard arrive en retard”}. \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{“Bernard vient”} \,|\, \text{“Bernard arrive en retard”}) &= \mathbb{P}(\mathrm{BV} \,|\, \mathrm{BR}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathrm{BR} \,|\, \mathrm{BV})\,\mathbb{P}(\mathrm{BV})}{\mathbb{P}(\mathrm{BR} \,|\, \mathrm{BV})\,\mathbb{P}(\mathrm{BV}) + \mathbb{P}(\mathrm{BR} \,|\, \mathrm{BV}^c)\,\mathbb{P}(\mathrm{BV}^c)} \\ &= \frac{1/2 \times 2/3}{1/2 \times 2/3 + 1 \times 1/3} = 1/2. \end{aligned}$$

6. Appelons

E l'événement "échouer 2 fois",
A l'événement "la personne a révisé ses cours", et
B l'événement contraire de A.

La probabilité $\mathbb{P}(E \mid A)$ de "E sachant A" est $0.2^2 = 0.04$. La probabilité $\mathbb{P}(E \mid B)$ de "E sachant B" est $0.6^2 = 0.36$. A priori, on suppose que la personne qui a échoué 2 fois à l'examen a correctement révisé avec une probabilité de 0.5. On a donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.5$.

La formule de Bayes donne alors:

$$\mathbb{P}(A \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E \mid B)\,\mathbb{P}(B)} = \frac{0.04 \times 0.5}{0.04 \times 0.5 + 0.36 \times 0.5} = 0.1$$

Probabilité d'avoir révisé sachant que l'on a échoué 2 fois est 0.1. Probabilité de ne pas avoir révisé sachant que l'on a échoué 2 fois est 0.9. Il y a donc une probabilité de 0.9 que la personne n'ait pas révisé. Ce qu'elle dit est peu plausible!

7. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$. Alors, en particulier, $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) > 0$ pour tout $k \leq n$. On veut démontrer:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}),$$

c.à.d.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \mid A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}) \quad \text{où } A_0 := \Omega\,.$$

On démontre cette propriété par récurrence. La formule est vraie pour $n = 2$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,.$$

Supposons que la formule soit vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \cdot \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_n)\end{aligned}$$

(b) Soient $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{A}$, deux à deux disjoints, et $\mathbb{P}(B_i) > 0$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A \mid B_1) = \mathbb{P}(A \mid B_2) = \ldots = \mathbb{P}(A \mid B_n)$. On note $\alpha := \mathbb{P}(A \mid B_i)$
On veut démontrer :

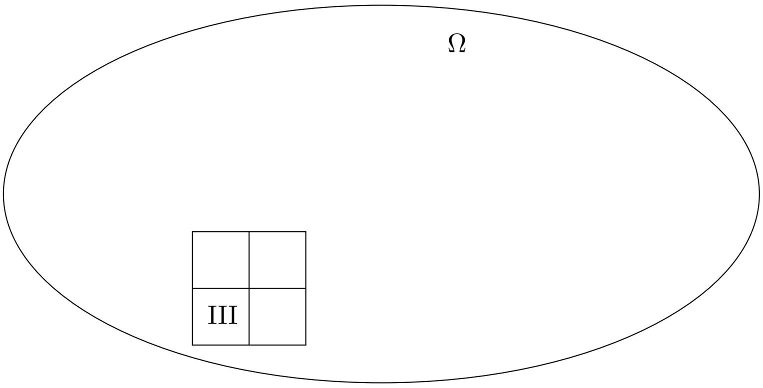
$$\mathbb{P}(A \mid B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \mathbb{P}(A \mid B_i).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \mid B_1 \cup \ldots \cup B_n) &= \frac{\mathbb{P}\big(A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n)\big)}{\mathbb{P}\big(B_1 \cup \ldots \cup B_n\big)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big((A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)\big)}{\mathbb{P}\big(B_1 \cup \ldots \cup B_n\big)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \mid B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \alpha\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)} = \alpha\,\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)} = \alpha\,.\end{aligned}$$

8. Une fête a lieu dans les quatre salles I, II, III, IV d'un club étudiant. Une étudiante cherche un autre étudiant. Elle sait que la probabilité que cet étudiant participe à la fête est égale à p, et s'il attend, la probabilité d'être dans une certaine pièce est $\frac{1}{4}$.

Solution 1. Calculer directement



A	L'étudiant est à la fête: $\mathbb{P}(A) = p$
B_i	L'étudiant est dans la i-ème pièce: $\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{1}{4}, \quad i = 1, ..., 4$

(a) $\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(B_i \cap A) = \mathbb{P}(B_i \mid A)\,\mathbb{P}(A) = \frac{p}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4$

(b) On trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_4 \mid (\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3)) &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap (\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3))}{\mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3)} = \frac{\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B_4)}{1 - \mathbb{P}(\overline{\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3})} \overset{\text{DeMorgan}}{=} \frac{\mathbb{P}(B_4)}{1 - \mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup B_3)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B_4)}{1 - (\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(B_3))} \\
&= \frac{\frac{p}{4}}{1 - \frac{3}{4}p} = \frac{p}{4 - 3p}
\end{aligned}$$

Solution 2. Formule de Bayes: Plus facile, en définissant les événements appropriés

B	L'étudiant n'est pas dans les salles I, II, III
$A_1, ..., A_4$	L'étudiant est dans la i-ème pièce, $i = 1, 2, 3, 4$
A_5	L'étudiant n'est pas à la fête du tout.

Donc: $\quad A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ et $\bigcup_{i=1}^{5} A_i = \Omega$ (événement certain)

et $\quad \mathbb{P}(B \mid A_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ (parce que $\mathbb{P}(B \cap A_i) = 0$)
$\mathbb{P}(B \mid A_4) = \mathbb{P}(B \mid A_5) = 1$ (parce que $A_i \subset B$ et alors $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)$ pour $i = 4, 5$)

Finalement, par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(A_4 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_4)\mathbb{P}(B \mid A_4)}{\sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)} = \frac{\frac{p}{4} \cdot 1}{\underbrace{\frac{p}{4} \cdot 1}_{i=4} + \underbrace{1 - p}_{i=5}} = \frac{p}{4 - 3p}.$$