

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD 4

2020-21

1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ dénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et $\mathbb{P} = (p(\omega) \mid \omega \in \Omega)$ une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) , c.à.d.,

$$\forall \omega \in \Omega, p(\omega) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Le nombre $m(\mathbb{P}) = \sum_{\omega \in \Omega} \omega p(\omega)$ (s'il existe) s'appelle la *valeur moyenne* de \mathbb{P} .

(a) Pour la loi \mathbb{P} de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ sur \mathbb{N} ,

$$\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad p(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!},$$

on trouve

$$m(\mathbb{P}) = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

(b) Pour la loi binômiale \mathbb{P} de paramètres p et n ,

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n\}, \quad p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

on trouve

$$\begin{aligned} m(\mathbb{P}) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n np \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{(n-1)-k} \\ &= np (p + (1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

(c) Pour la loi géométrique \mathbb{P} de paramètre p sur \mathbb{N}^* ,

$$\Omega = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad p(n) = p(1-p)^{n-1},$$

on trouve

$$m(\mathbb{P}) = \sum_{n=1}^{\infty} n p (1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} n (1-p)^{n-1} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Rappel Avec la série géométrique on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 1-p$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (1-p)^{n-1} = \frac{1}{p^2}.$$

2. A la cantine, il y a des spaghettis accompagnés de morceaux de jambon. De combien de morceaux de jambon a-t-on besoin en moyenne dans une portion, pour qu'en moyenne seulement une portion sur 100 soit sans jambon ?

On a

$$p(n) := \mathbb{P}\{\text{"n morceaux de jambon dans une portion"}\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

où $\lambda > 0$ est la valeur moyenne. L'égalité

$$p(0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = \frac{1}{100}$$

donne $e^\lambda = 100$ ou $\lambda = \log 100 \approx 4.605$. Par conséquent, en moyenne 4.6 morceaux de jambon sont nécessaires pour qu'au maximum une portion sur 100 soit sans jambon.

3. (a) On note N_k resp. R_k l'événement selon lequel la k -ième boule tirée soit noire resp. rouge.

i. Alors

$$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \frac{r}{r+n} \frac{n}{r+n+d} + \frac{n}{r+n} \frac{n+d}{r+n+d} = \frac{n}{n+r}.$$

ii. De plus, on trouve

$$\mathbb{P}(N_1 | N_2) = \frac{\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)}{\mathbb{P}(N_2)} = \frac{\frac{n}{n+r} \frac{n+d}{n+r+d}}{\frac{n}{n+r}} = \frac{n+d}{n+r+d}.$$

(b) On remarque d'abord que

$$\mathbb{P}(N_1) = \frac{n}{n+r}.$$

D'autre part l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_k) &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(\{i \text{ boules rouges}\} \cap \{k-1-i \text{ boules noires}\} \cap \{\text{au } k\text{-ième tirage une boule noire}\}) \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \prod_{j=0}^{k-1-i} (n+jd) \prod_{\ell=0}^{i-1} (r+\ell d)}{\prod_{j=0}^{k-1} (n+r+jd)}, \quad \text{où par convention } \prod_{\ell=0}^{-1} := 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_k) &= \frac{n}{n+r} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \prod_{j=1}^{k-1-i} (n+jd) \prod_{\ell=0}^{i-1} (r+\ell d)}{\prod_{j=1}^{k-1} (n+r+jd)} \\ &= \frac{n}{n+r} \frac{\prod_{j+\ell=1}^{k-1} (n+jd) + (r+\ell d)}{\prod_{j=1}^{k-1} (n+r+jd)} = \frac{n}{n+r}. \end{aligned}$$

(c) Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_1 | N_2 \cap \dots \cap N_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(N_1 \cap \dots \cap N_k)}{\mathbb{P}(N_2 \cap \dots \cap N_k)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \frac{n+jd}{n+r+jd}}{\prod_{j=0}^{k-2} \frac{n+jd}{n+r+jd}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n+(k-1)d}{n+r+(k-1)d} = 1. \end{aligned}$$

4. Soit Ω dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Étant donné deux probabilités \mathbb{P}, \mathbb{Q} sur (Ω, \mathcal{A}) , on pose

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) := \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) \log \left(\frac{q(\omega)}{p(\omega)} \right) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \frac{q(\omega)}{p(\omega)} \log \left(\frac{q(\omega)}{p(\omega)} \right),$$

où $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) := +\infty$ si $\exists \omega \in \Omega$ tel que $p(\omega) = 0, q(\omega) \neq 0$.

Pour la fonction continue

$$u(x) = \begin{cases} x \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

on remarque que $u(x) \geq x - 1$ pour tout $x \geq 0$, et que $u(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{0, 1\}$.

a) Soit $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) < \infty$, alors

$$\begin{aligned} H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u \left(\frac{q(\omega)}{p(\omega)} \right) \geq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \left(\frac{q(\omega)}{p(\omega)} - 1 \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \frac{q(\omega)}{p(\omega)} - \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Soit $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0$, alors

$$u \left(\frac{q(\omega)}{p(\omega)} \right) = 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega \text{ avec } p(\omega) \neq 0,$$

et donc $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

En résumé, l'on a $0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \leq \infty$, et $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0$ si et seulement si $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$.

b) Soit $\text{card}(\Omega) < \infty$ et soit \mathbb{P} la loi uniforme sur Ω , c.à.d. $p(\omega) = 1/\text{card}(\Omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Alors

$$H(\mathbb{P}) = - \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \log p(\omega) = \left(\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \right) \log \text{card}(\Omega) = \log \text{card}(\Omega).$$

D'autre part, pour toute probabilité \mathbb{Q} sur (Ω, \mathcal{A}) on trouve

$$\begin{aligned} 0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) &= \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) [\log q(\omega) - \log p(\omega)] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) [\log q(\omega) + \log \text{card}(\Omega)] = -H(\mathbb{Q}) + H(\mathbb{P}), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$H(\mathbb{Q}) \leq H(\mathbb{P}) \quad \text{pour toute probabilité } \mathbb{Q} \text{ sur } (\Omega, \mathcal{A}).$$

Par conséquent, parmi toutes les probabilités sur Ω , la loi uniforme a l'entropie maximale.

- c) Soient $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mu \in]1, \infty[$ et soit \mathbb{P} la loi géométrique de moyenne $m(\mathbb{P}) = \mu = 1/p$. Alors pour toute probabilité \mathbb{Q} sur (Ω, \mathcal{A}) avec $m(\mathbb{Q}) = \mu$, on obtient:

$$\begin{aligned} 0 \leq H(\mathbb{Q} | \mathbb{P}) &= \sum_n q(n) \log \frac{q(n)}{(1-p)^{n-1}p} \\ &= -H(\mathbb{Q}) - \sum_n q(n) [(n-1) \log(1-p) - \log p] \\ &= -H(\mathbb{Q}) - (\mu - 1) \log(1-p) - \log p, \end{aligned}$$

ce qui donne en particulier pour $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$:

$$H(\mathbb{P}) = -(\mu - 1) \log(1-p) - \log p,$$

et donc $H(\mathbb{Q}) \leq H(\mathbb{P})$.

Par conséquent, parmi toutes les probabilités sur Ω de valeur moyenne μ , la loi géométrique de paramètre $p = 1/\mu$ a l'entropie maximale.

- d) Soient $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\}$ et $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$. Soit \mathbb{P} la probabilité sur Ω avec

$$p(\omega) := p^{S_n(\omega)}(1-p)^{n-S_n(\omega)}.$$

D'abord, on constate que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_k \sum_{\omega: S_n(\omega)=k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

et

$$\sum_{\omega \in \Omega} S_n(\omega) p(\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{\omega: S_n(\omega)=k} k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np = \mu.$$

Alors

$$\begin{aligned} H(\mathbb{P}) &= - \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) [S_n(\omega) \log p - (n - S_n(\omega)) \log(1-p)] \\ &= -np \log p + (n - np) \log(1-p) \\ &= -n[p \log p + (1-p) \log(1-p)]. \end{aligned}$$

Soit maintenant \mathbb{Q} une probabilité quelconque sur Ω avec $\sum_{\omega \in \Omega} S_n(\omega) q(\omega) = \mu$, alors

$$\begin{aligned} 0 \leq H(\mathbb{Q} | \mathbb{P}) &= \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) [\log q(\omega) + S_n(\omega) \log p - (n - S_n(\omega)) \log(1-p)] \\ &= -H(\mathbb{Q}) + [\mu \log p + (n - \mu) \log(1-p)] \\ &= -H(\mathbb{Q}) + H(\mathbb{P}) \end{aligned}$$

et par conséquent $H(\mathbb{Q}) \leq H(\mathbb{P})$. Parmi toutes les probabilités \mathbb{Q} sur Ω avec $\sum_{\omega \in \Omega} S_n(\omega) q(\omega) = \mu$, la loi $p(\omega) = p^{S_n(\omega)}(1-p)^{n-S_n(\omega)}$ où $p = \mu/n$, a donc l'entropie maximale.