Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD 5 2020-21

1. On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où

$$\Omega = \{110, 101, 011, 000\}$$

est muni de la tribu de ses parties et où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme:

$$\forall\, A \subset \Omega, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

c.à.d., $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Considèrons les trois événements:

$$A_i = \{\text{le } i\text{-ième chiffre est } 1\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Alors,

$$A_1 = \{110, 101\}, \quad A_2 = \{110, 011\}, \quad A_1 = \{101, 011\},$$

et donc

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

D'autre part, l'on a

$$A_1 \cap A_2 = \{110\}, \quad A_1 \cap A_3 = \{101\}, \quad A_2 \cap A_3 = \{011\},$$

et donc

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}.$$

Il en résulte que:

$$\forall\, i, j \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j, \quad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

On constate alors que les événements A_1, A_2, A_3 sont *indépendants deux à deux.*
Mais A_1, A_2, A_3 *ne sont pas indépendants*:
On a $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$, et donc $0 = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{1}{8}$.

2. On a deux événements A, B indépendants avec $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$. D'abord on constate

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4};$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Pour $C = A \triangle B \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, on trouve

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part, l'on a

$$A \cap C = A \cap (A \triangle B) = A \setminus (A \cap B);$$
$$B \cap C = B \cap (A \triangle B) = B \setminus (A \cap B);$$

et donc

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Il en résulte que:

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}\,.$$

On trouve alors que les événements A, B, C sont *indépendants deux à deux*;
mais A, B, C *ne sont pas indépendants*:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}\,.$$

3. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ une espace probabilisé. Il faut trouver trois événements A, B et C tels que

- A et B sont indépendants;
- B et C sont indépendants; mais
- A et C ne sont pas indépendants.

Par exemple, on fixe $A \in \mathscr{A}$ quelconque tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$.
Alors on peut prendre $B := \Omega$ et $C := A$.
Plus généralement: Il suffit de prendre deux événements A, B independants avec $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Alors A est indépendant de B, et B de A, mais A n'est pas indépendant de A.

4. On considère

$$\Omega = \big\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \,\big|\, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{P, F\}\big\}$$

et

$$\begin{aligned} A &= \big\{(P,P,P),\ (P,P,F),\ (P,F,P),\ (P,F,F)\big\} \\ B &= \big\{(P,P,P),\ (P,P,F),\ (P,F,P),\ (F,P,P)\big\}. \end{aligned}$$

Alors l'on a

$$A \cap B = \big\{(P,P,P),\ (P,P,F),\ (P,F,P)\big\}.$$

(a) Soit $\mathbb{P}$ la loi uniforme sur Ω, c.à.d. $\forall\, \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/8$. Alors

$$\frac{3}{8} = \mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{4}\,.$$

Par conséquent, A et B ne sont pas indépendants.

(b) Soit $\mathbb{P}$ la probabilité sur Ω, définie de façon suivante:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{(P,F,F)\} = \mathbb{P}\{(F,P,P)\} = \frac{1}{4}\,; \\ &\mathbb{P}\{(P,P,P)\} = \mathbb{P}\{(P,P,F)\} = \mathbb{P}\{(P,F,P)\} = \\ &\qquad = \mathbb{P}\{(F,F,F)\} = \mathbb{P}\{(F,P,F)\} = \mathbb{P}\{(F,F,P)\} = \frac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Alors l'on a

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\,.$$

Par conséquent, A et B sont indépendants par rapport à $\mathbb{P}$.

5. On veut montrer que deux événements A et B peuvent être indépendants, et ne plus l'être conditionnellement à un événement C.

Supposons A et B indépendants et $C := A \cup B$; alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B \,|\, C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \,|\, C) \qquad \text{car } B \cap C = B \\ &\neq \mathbb{P}(A \,|\, C)\,\mathbb{P}(B \,|\, C), \end{aligned}$$

dès que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ et $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cup B) < 1$.

6. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants, et $I = I_1 \cup I_2$ où $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Soit $(B_i)_{i\in I}$ la famille d'événements définis par:

$$B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } \; i \in I_1, \\ A_i^c & \text{si } \; i \in I_2. \end{cases}$$

On veut montrer qu'alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ est aussi indépendante.

Il faut démontrer que, pour toute partie **finie** K de I, on a:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in K} B_i\right) = \prod_{i\in K} \mathbb{P}\left(B_i\right)$$

Soit $K = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Par hypothèse, les événements $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ sont indépendants. Il suffit de démontrer que la famille reste indépendante si on remplace dans cette famille un événement A_{i_k} par $A_{i_k}^c$. Sans restrictions (après rénumérotation), il suffit de remplacer A_{i_1} par $A_{i_1}^c$. Mais on trouve:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i_1}^c \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) &= \mathbb{P}\big((\Omega \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) \setminus (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n})\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\Omega \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}\big) - \mathbb{P}\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}\big) \\
&= \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_{i_k}) - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_k}) \\
&= \big(1 - \mathbb{P}(A_{i_1})\big) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_{i_k}) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1}^c)\,\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).
\end{aligned}$$

Donc, si la famille $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n})$ est indépendante, alors $(A_{i_1}^c, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n})$ est aussi indépendante. En remplaçant successivement dans $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n})$ les A_{i_k} par $A_{i_k}^c$ pour les $i_k \in K \cup I_2$, on obtient que si $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n})$ est indépendante, alors aussi $(B_{i_1}, \ldots, B_{i_n})$.