Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD 6 2020-21

1. Soit X une variable binômiale avec $\mathbb{E}[X] = 6$ et $\mathrm{var}(X) = 4$, c.à.d,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np = 6\\ \mathrm{var}(X) &= n\,p(1-p) = 4\,.\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\frac{\mathrm{var}(X)}{\mathbb{E}[X]} = 1 - p = \frac{4}{6},$$

et par conséquent,

$$p = \frac{1}{3}, \quad n = 18\,.$$

2. Soit X une variable aléatoire réelle avec un moment d'ordre deux fini, c.à.d. $\mathbb{E}[X^2] < \infty$.

(a) Comme

$$X^2 - 2|X| + 1 = (|X| - 1)^2 \geq 0,$$

on obtient

$$\mathbb{E}[X^2 - 2|X| + 1] \geq 0,$$

par conséquent

$$\mathbb{E}[X^2] + 1 \geq 2\mathbb{E}|X|.$$

On conclut que $\mathbb{E}[X] < +\infty$, et

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]\\ &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\,\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right]\\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 < +\infty\end{aligned}$$

(b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ les inégalités suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] \geq \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] &\iff a^2 - 2a\,\mathbb{E}[X] \geq -\mathbb{E}[X]^2\\ &\iff (\mathbb{E}[X] - a)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $p_n = \mathbb{P}\{X = n\} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda > 0$ fixé.

i) Supposons que X est suit une loi de Poisson de paramètre λ. Alors, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\mathbb{P}\{X = n\}}{\mathbb{P}\{X = n-1\}} = \frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}}{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{\lambda}{n}.$$

ii) Réciproquement, supposons que

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Alors on a

$$p_n = p_{n-1}\,\frac{\lambda}{n} = p_{n-2}\,\frac{\lambda^2}{n(n-1)} = \ldots = p_0\,\frac{\lambda^n}{n!}\,,$$

Puisque

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = p_0\,e^{\lambda},$$

on obtient $p_0 = e^{-\lambda}$. Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}\,,$$

c.à.d. X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

i) Supposons que X suit une loi géométrique. On a alors

$$\mathbb{P}\{X = k\} = (1-p)^{k-1}\,p\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

avec $p := \mathbb{P}\{X = 1\}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \leq n\} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{X = k\} = p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k = p\,\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}\{X > n\} = (1-p)^n.$$

On obtient, pour tous les $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X > k+n \,|\, X > n\} &= \frac{\mathbb{P}\{X > k+n\,,\, X > n\}}{\mathbb{P}\{X > n\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{X > k+n\}}{\mathbb{P}\{X > n\}} \\ &= \frac{(1-p)^{k+n}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}\{X > k\}\,,\end{aligned}$$

X est donc bien *sans mémoire*.

ii) Supposons maintenant que

$$\mathbb{P}\{X > k+n \,|\, X > n\} = \mathbb{P}\{X > k\} \quad \text{pour tout } n,\, k \in \mathbb{N}^*.$$

On pose $p := \mathbb{P}\{X = 1\}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = k\} &= \mathbb{P}\{X > k-1\} - \mathbb{P}\{X > k\} \\ &= \mathbb{P}\{X > k-1+n \,|\, X > n\} - \mathbb{P}\{X > k+n \,|\, X > n\} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{X > k+n-1\} - \mathbb{P}\{X > k+n\}}{\mathbb{P}\{X > n\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{X = k+n\}}{\mathbb{P}\{X > n\}}\,.\end{aligned}$$

En particulier, pour $n = 1$,

$$\mathbb{P}\{X = k+1\} = \mathbb{P}\{X = k\}\,\mathbb{P}\{X > 1\} = \mathbb{P}\{X = k\}\,(1-p)\,.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = n\} &= \mathbb{P}\{X = n-1\}\,(1-p) \\ &= \mathbb{P}\{X = n-2\}\,(1-p)^2 = \ldots = \mathbb{P}\{X = 1\}\,(1-p)^{n-1} = p\,(1-p)^{n-1}\,,\end{aligned}$$

et X suit donc une loi géométrique.

5. Soit X le nombre des accidents de Monsieur Dupont pendant une année. On sait que $\mathbb{E}[X] = 0.5$. Supposons que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors on a $\lambda = \mathbb{E}[X] = 0.5$ et

$$\mathbb{P}\{X = n\} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En particulier, on obtient:

$$\mathbb{P}\{\text{“au moins 1 accident”}\} = \mathbb{P}\{X \geq 1\} = 1 - \mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-0.5} \approx 0.39\,;$$

$$\mathbb{P}\{\text{“exactement 2 accident”}\} = \mathbb{P}\{X = 2\} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^2}{2!} = \frac{e^{-0.5}}{8} \approx 0.076\,.$$

6. (a) Soit Y le nombre d'enfants jusqu'à avoir un enfant de chaque sexe. On cherche le nombre attendu $\mathbb{E}[Y]$. Notons X le nombre d'enfants *après le prémier enfant* jusqu'à avoir un enfant de chaque sexe. Alors l'on a

$$X = Y - 1\,.$$

On constate que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/2$. Il résulte alors que

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[1 + X] = 1 + \mathbb{E}[X] = 1 + 1/p = 1 + 2 = 3\,.$$

Conclusion Le nombre attendu d'enfants est $\mathbb{E}[Y] = 3$.

(b) On modélise par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où

$$\Omega = \big\{\omega \mid \omega \text{ est permutation de } \{1, \dots, n\}\big\}$$

et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Rappellons qu'une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est une application bijective

$$\omega \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}.$$

Dans l'expérience donnée $\omega(i)$ signifie la place du i-ième CD. On pose

$$Z \colon \Omega \to \{1, \dots, n\}, \quad Z(\omega) = \operatorname{card}\{i \,|\, \omega(i) = i\}\,.$$

Alors Z est une variable aléatoire donnant le nombre des CD dans leurs pochettes correctes.

On peut écrire:

$$Z = X_1 + \ldots + X_n \quad \text{où } X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(i) = i \qquad \text{“CD } i \textit{ est dans sa pochette”} \\ 0 & \text{si } \omega(i) \neq i \qquad \text{“CD } i \textit{ est dans une fausse pochette”}. \end{cases}$$

Puisque l'on a

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}\{X_i = 1\} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } i,$$

il vient alors

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = n\,\frac{1}{n} = 1.$$