Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique

Corrigé TD 7 2020-21

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) *Montrons que $\mathbb{E}[X] < \infty$ si et seulement si la série de terme général $P\{X > n\}$ converge.* En fait, d'abord on remarque que $\mathbb{E}[X]$ est bien définie, car $X \geq 0$. Par définition de l'espérance, l'on a:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbb{P}\{X = n\} \\
&= 1 \cdot \mathbb{P}\{X = 1\} + 2 \cdot \mathbb{P}\{X = 2\} + 3 \cdot \mathbb{P}\{X = 3\} + 4 \cdot \mathbb{P}\{X = 4\} + \dots \\
&= \mathbb{P}\{X = 1\} + \mathbb{P}\{X = 2\} + \mathbb{P}\{X = 3\} + \mathbb{P}\{X = 4\} + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad + \mathbb{P}\{X = 2\} + \mathbb{P}\{X = 3\} + \mathbb{P}\{X = 4\} + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathbb{P}\{X = 3\} + \mathbb{P}\{X = 4\} + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathbb{P}\{X = 4\} + \dots \\
&= \mathbb{P}\{X > 0\} + \mathbb{P}\{X > 1\} + \mathbb{P}\{X > 2\} + \mathbb{P}\{X > 3\} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\}\,.
\end{aligned}$$

En particulier, on trouve que

$$\mathbb{E}[X] < \infty \text{ si et seulement si } \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}\{X > n\} < \infty,$$

et qu'alors:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\{X > n\}.$$

(b) Soit X maintenant une variable géométrique de paramètre p.
On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} x^{k} = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X > n\} &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{X = k\} = 1 - \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p \\
&= 1 - p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} = 1 - p\,\frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} = (1-p)^n,
\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1 - (1-p)} = \frac{1}{p}\,.$$

2. Soit $g\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ strictement croissante. Pour $a > 0$ on veut démontrer que

$$P\big\{|X| > a\big\} \leq \frac{\mathbb{E}\big[g(|X|)\big]}{g(a)}.$$

D'abord on remarque que $g(a) > 0$ pour $a > 0$. Alors, on obtient:

$$\mathbb{E}\big[g(|X|)\big] \geq \mathbb{E}\big[g(|X|)\,1_{\{|X|>a\}}\big] \geq g(a)\,\mathbb{E}\big[1_{\{|X|>a\}}\big] = g(a)\,\mathbb{P}\big\{|X| > a\big\}.$$

3. Dans une urne, se trouvent n boules semblables, qui sont numérotées de 1 à n. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne. On note X le numéro de la première boule tirée et Y le numéro de la deuxième.

On modélise cette situation de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \ \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, n\}, \ \omega_1 \neq \omega_2\} \ ; \quad \mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega) \, ; \\
&\mathbb{P}\{(\omega_1, \omega_2)\} = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall\, (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \, ; \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(\omega) = \omega_1, \quad \text{et} \\
&Y : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(\omega) = \omega_2 \, .
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big\{X = k\big\} &= \mathbb{P}\big\{(k,1), \dots, (k,k-1), (k,k+1), \dots, (k,n)\big\} \\
&= \mathbb{P}\big\{(k,1)\big\} + \dots + \mathbb{P}\big\{(k,k-1)\big\} + \mathbb{P}\big\{(k,k+1)\big\} + \dots + \mathbb{P}\big\{(k,n)\big\} \\
&= \frac{n-1}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

De même, on a $\mathbb{P}\big\{Y = k\big\} = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
On note d'abord que les variables X et Y ne sont pas indépendantes :

$$\mathbb{P}\big\{X = 1, \ Y = 1\big\} = \mathbb{P}(\varnothing) = 0; \quad \text{mais} \ \ \mathbb{P}\big\{X = 1\big\} \cdot \mathbb{P}\big\{Y = 1\big\} = \frac{1}{n^2} \, .$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{n} k \, \mathbb{P}\big\{X = k\big\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \, ; \\
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{n} k \, \mathbb{P}\big\{Y = k\big\} = \frac{n+1}{2} \, ; \\
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \, \mathbb{P}\big\{X = k\big\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \, ; \\
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{\substack{k,\, \ell = 1 \\ k \neq \ell}}^{n} k \, \ell \, \mathbb{P}\big\{X = k, Y = \ell\big\} = \sum_{\substack{k,\, \ell = 1 \\ k \neq \ell}}^{n} \frac{k \, \ell}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{k,\, \ell = 1 \\ k \neq \ell}}^{n} k \, \ell \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k,\, \ell = 1}^{n} k \, \ell - \sum_{k=1}^{n} k^2 \right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{n(n-1)} \, \frac{3n(n+1) - 2(2n+1)}{12} = \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{12(n-1)} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{12(n-1)} = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.
\end{aligned}$$

Il résulte alors que :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12} \\
&= \operatorname{var}(Y)\,; \\
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n+1}{12}\,(3n+2-3n-3) = -\frac{n+1}{12}; \\
\rho(X,Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X,Y)} = -\frac{n+1}{12}\cdot\frac{12}{n^2-1} = -\frac{1}{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

4. Soit X une v.a.

(a) Comme la fonction $F_X\colon a \mapsto \mathbb{P}\{X \leq a\}$ est croissante et continue à droite, il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\{X < M\} \leq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}\{X \leq M\}$.

(b) Admettons sans aucune restriction que $a < M$, alors pour presque tout $\omega \in \mathscr{A}$ on a:

$$|X-a| - |X-M| = (M-a)\big(2\,\mathbf{1}_{\{X\geq M\}}(\omega) - 1\big) + 2(X-a)\mathbf{1}_{\{a<X<M\}}(\omega).$$

En utilisant l'estimée $\mathbb{P}\{X \geq M\} \geq \frac{1}{2}$ et en évaluant l'espérance conditionelle on obtient:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[|X-a| - |X-M|\big] \\
&\quad= (M-a)\,2\,\mathbb{P}\{X\geq M\} - (M-a) + 2\mathbb{E}\left[(X-a)\mathbf{1}_{\{a<X<M\}}\right] \\
&\quad\geq (M-a) - (M-a) + 2\mathbb{E}\left[(X-a)\mathbf{1}_{\{a<X<M\}}\right] \\
&\quad\geq 0.
\end{aligned}
$$

(c) On utilise (b) avec $a = \mathbb{E}[X]$ et l'on applique l'inégalité de Hölder:

$$\mathbb{E}\big|X-M\big| \leq \mathbb{E}\big|X-\mathbb{E}[X]\big| \leq \mathbb{E}\big[\big|X-\mathbb{E}[X]\big|^2\big]^{1/2}.$$