Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 1

Corrigé TD 8 2020-21

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}\{X_i = 1\} = \mathbb{P}\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}\,.$$

On pose $X_3 := X_1X_2$. Remarquons d'abord que X_3 est une v.a. à valeurs dans $\{\pm 1\}$, et qu'on a, par indépendance des v.a. X et Y:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_3 = 1\} = \mathbb{P}\{X_1X_2 = 1\} &= \mathbb{P}\{(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) \text{ ou } (X_1 = -1 \text{ et } X_2 = -1)\}\\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1,\ X_2 = 1\} + \mathbb{P}\{X_1 = -1,\ X_2 = -1\}\\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 1\} + \mathbb{P}\{X_1 = -1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = -1\}\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}\{X_3 = -1\} = 1 - \mathbb{P}\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}\,.$$

(a) Montrons maintenant que les variables X_1, X_2, X_3 sont *indépendantes deux à deux*.
En fait,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_1X_2 = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_2 = 1\}\\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 1\} = \frac{1}{4};\\ \mathbb{P}\{X_1 = -1,\, X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = -1,\, X_1X_2 = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1,\, X_2 = -1\}\\ &= \mathbb{P}\{X_1 = -1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = -1\} = \frac{1}{4};\\ \mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_3 = -1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_1X_2 = -1\} = \mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_2 = -1\}\\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = -1\} = \frac{1}{4};\\ \mathbb{P}\{X_1 = -1,\, X_3 = -1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = -1,\, X_1X_2 = -1\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1,\, X_2 = 1\}\\ &= \mathbb{P}\{X_1 = -1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 1\} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_3 = 1\} = \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}\{X_1 = -1,\, X_3 = 1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = -1\}\,\mathbb{P}\{X_3 = 1\} = \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_3 = -1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_3 = -1\} = \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}\{X_1 = -1,\, X_3 = -1\} &= \mathbb{P}\{X_1 = -1\}\,\mathbb{P}\{X_3 = -1\} = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

ce qui démontre que X_1, X_3 sont indépendantes. De manière analogue on vérifie que X_2, X_3 sont indépendantes. Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont donc indépendantes deux à deux.

(b) Montrons maintenant que les variables X_1, X_2, X_3 *ne sont pas indépendantes*.
En fait,

$$\mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_2 = 1,\, X_3 = -1\} = \mathbb{P}\{X_1 = X_2 = 1,\, X_1X_2 = -1\} = \mathbb{P}(\varnothing) = 0;$$

mais $\mathbb{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_3 = -1\} = \frac{1}{8}$. Donc

$$\mathbb{P}\{X_1 = 1,\, X_2 = 1,\, X_3 = -1\} \neq \mathbb{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_3 = -1\}\,.$$

2. (a) Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite finie de v.a. indépendantes et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une suite finie de fonctions mesurables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour vérifier que les variables

$$\varphi_1 \circ X_1, \dots, \varphi_n \circ X_n$$

sont indépendantes, fixons $y_1, \dots, y_n$ dans $\mathbb{R}$. On pose $A_1 = \varphi_1^{-1}\{y_1\}, \dots, A_n = \varphi_n^{-1}\{y_n\}$. Comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_n \in A_n\},$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\varphi_1 \circ X_1 = y_1, \dots, \varphi_n \circ X_n = y_n\} &= \mathbb{P}\{\varphi_1(X_1) = y_1, \dots, \varphi_n(X_n) = y_n\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1 \in \varphi_1^{-1}\{y_1\}, \dots, X_n \in \varphi_n^{-1}\{y_n\}\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_n \in A_n\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1 \in \varphi_1^{-1}\{y_1\}\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_n \in \varphi_n^{-1}\{y_n\}\} \\
&= \mathbb{P}\{\varphi_1 \circ X_1 = y_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{\varphi_n \circ X_n = y_n\}.
\end{aligned}$$

(b) Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes telles que $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

On veut montrer que $\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n |X_i|\right] < \infty$, et qu'alors $\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$.

En fait,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n |X_i|\right] &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)} |x_1 \cdot \ldots \cdot x_n| \, \mathbb{P}\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \\
&= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)} |x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n| \, \mathbb{P}\{X_1 = x_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_n = x_n\} \\
&= \left(\sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} |x_1| \, \mathbb{P}\{X_1 = x_1\} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{x_n \in X_n(\Omega)} |x_n| \, \mathbb{P}\{X_n = x_n\} \right) \\
&= \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] < \infty\,.
\end{aligned}$$

Le même calcul sans les modules $|\ |$ est alors licite et conduit à l'égalité :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i].$$

(c) Évidemment, si $\varphi \circ X$ est constante p.s. (p.s. abrège “presque sûrement”), disons $\varphi \circ X = c \in \mathbb{R}$ p.s., alors X et $\varphi \circ X$ sont indépendantes :

$$\mathbb{P}\{X \in A \text{ et } \varphi \circ X \in B\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{P}\{X \in A\}, & \text{si } c \in B \\ 0 \quad , & \text{si } c \notin B \end{matrix} \right\} = \mathbb{P}\{X \in A\} \cdot \mathbb{P}\{\varphi \circ X \in B\}\,.$$

Réciproquement, supposons que X et $\varphi \circ X$ sont indépendantes, alors à cause de (a), $\varphi \circ X$ et $\varphi \circ X$ sont aussi indépendantes, c.à.d. $\varphi \circ X$ est indépendante d'elle-même. Donc

$$\mathbb{P}\{\varphi \circ X \le \alpha\} = \mathbb{P}\big(\{\varphi \circ X \le \alpha\} \cap \{\varphi \circ X \le \alpha\}\big) = \big(\mathbb{P}\{\varphi \circ X \le \alpha\}\big)^2,$$

et par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\{\varphi \circ X \le \alpha\} \in \{0, 1\}.$$

D'où l'on peut conclure avec le Lemme suivant :

Lemme Une v.a. réelle Y est constante p.s. si et seulement si

$$\mathbb{P}\{Y \leq \alpha\} \in \{0, 1\}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve La condition est trivialement nécessaire. Soit maintenant Y une v.a. telle que $\mathbb{P}\{Y \leq \alpha\} \in \{0, 1\}$ pour tout α. Alors :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\{Y \leq \alpha\} = 1 \quad \text{et} \quad \exists\, \beta \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\{Y \leq \beta\} = 0.$$

En effet, quand $n \to \infty$, on a (voir exercice 5; TD 1) :

$$\begin{aligned} \{Y \leq n\} \uparrow \Omega, &\quad \text{et donc } \{0,1\} \ni \mathbb{P}\{Y \leq n\} \uparrow \mathbb{P}(\Omega) = 1; \\ \{Y \geq -n\} \downarrow \varnothing, &\quad \text{et donc } \{0,1\} \ni \mathbb{P}\{Y \geq -n\} \downarrow \mathbb{P}(\varnothing) = 0. \end{aligned}$$

Si on pose

$$\alpha_0 := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\{Y \leq \alpha\} = 1\}.$$

Comme $\{Y \leq \alpha_0 + \frac{1}{n}\} \downarrow \{Y \leq \alpha_0\}$ et $\{Y \leq \alpha_0 - \frac{1}{n}\} \uparrow \{Y < \alpha_0\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y \leq \alpha_0\} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Y \leq \alpha_0 + \frac{1}{n}\} = 1, \quad \text{et} \\ \mathbb{P}\{Y < \alpha_0\} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Y \leq \alpha_0 - \frac{1}{n}\} = 0, \end{aligned}$$

et par conséquent, $\mathbb{P}\{Y = \alpha_0\} = \mathbb{P}\{Y \leq \alpha_0\} - \mathbb{P}\{Y < \alpha_0\} = 1$, c.à.d. $Y = \alpha_0$ p.s.

(d) Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes. Alors $X_1 + \ldots + X_n$ est constante p.s. si et seulement si toute X_i est constante p.s.

Il suffit de montrer que sous l'hypothèse $X_1 + \ldots + X_n = c \in \mathbb{R}$ p.s., chaque X_i est constante p.s. (on peut se ramèner au cas $i = 1$). D'abord on note que si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, qu'alors aussi X_1 et $X_2 + \ldots + X_n$ sont indépendantes:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 = a, X_2 + \ldots + X_n = b\} &= \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_n: \\ x_2+\ldots+x_n=b}} \mathbb{P}\{X_1 = a, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} \\ &= \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_n: \\ x_2+\ldots+x_n=b}} \mathbb{P}\{X_1 = a\} \cdot \mathbb{P}\{X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = a\} \cdot \mathbb{P}\{X_2 + \ldots + X_n = b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'après la partie (a), en notant $c = X_1 + \ldots + X_n \in \mathbb{R}$ p.s., on déduit que aussi

$$X_1 \quad \text{et} \quad c - (X_2 + \ldots + X_n)$$

sont indépendantes. Lorsque $c - (X_2 + \ldots + X_n) = X_1$ p.s., la v.a. X_1 est indépendante d'elle-même. Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\{X_1 \leq \alpha\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq \alpha\}^2, \quad \text{et donc } \mathbb{P}\{X_1 \leq \alpha\} \in \{0, 1\}.$$

D'après le Lemme dans (c), la variable X_1 est une constante p.s.

3. Soient X_1, X_2 indépendantes et de lois de Poisson avec les paramètres λ_1 et λ_2 :

$$\mathbb{P}\{X_i = k\} = e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (i = 1, 2).$$

a) Soit $X = X_1 + X_2$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X = k\} &= \mathbb{P}\{X_1 + X_2 = k\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1 = j,\ X_2 = k - j, \quad j = 0, 1, \dots, k\} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\{X_1 = j,\ X_2 = k - j\} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\{X_1 = j\}\, \mathbb{P}\{X_2 = k - j\} \\
&= \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!}\, e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_1^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} \frac{\lambda_1^j\, \lambda_2^{k-j}}{(\lambda_1+\lambda_2)^k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité on utilise qu'avec $x := \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ et $y := \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, l'on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} \frac{\lambda_1^j\, \lambda_2^{k-j}}{(\lambda_1+\lambda_2)^k} &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^j \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, x^j\, y^{k-j} = (x+y)^k = 1\,.
\end{aligned}$$

Conclusion $X_1 + X_2$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$.

b) Pour la loi de X_1 conditionnelle à $\{X = n\}$ on trouve, pour $k = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 = k \,|\, X = n\} &= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = k,\ X = n\}}{\mathbb{P}\{X = n\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = k,\ X_2 = n - k\}}{\mathbb{P}\{X = n\}} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1} \dfrac{\lambda_1^k}{k!}\, e^{-\lambda_2} \dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \\
&= C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k} \quad \text{avec } p := \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.
\end{aligned}$$

La loi de X_1 conditionnelle à $\{X = n\}$ est donc binômiale de paramètres $p := \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ et n.

4. Soient $X_1, X_2 \colon \Omega \to \mathbb{N}$ des v.a. indépendantes telles que

$$\mathbb{P}\big\{X_1 = k \,\big|\, X_1 + X_2 = n\big\} = C_n^k\, 2^{-n}$$

pour tous les k, n avec $0 \le k \le n$.

On rappelle que $C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Donc $C_n^n = 1$, $C_n^{n-1} = n$ et on obtient

$$\frac{\mathbb{P}\{X_1 = n \,|\, X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1 \,|\, X_1 + X_2 = n\}} = \frac{C_n^n\, 2^{-n}}{C_n^{n-1}\, 2^{-n}} = \frac{1}{n}.$$

D'autre part, à cause de l'indépendance de X_1 et X_2, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}\{X_1 = n \,|\, X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1 \,|\, X_1 + X_2 = n\}} &= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = n, X_1 + X_2 = n\}/\mathbb{P}\{X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1, X_1 + X_2 = n\}/\mathbb{P}\{X_1 + X_2 = n\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = n, X_2 = 0\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1, X_2 = 1\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = n\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 0\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 1\}}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{\mathbb{P}\{X_1 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1\}} = \frac{\lambda}{n} \quad \text{où } \lambda := \frac{\mathbb{P}\{X_2 = 1\}}{\mathbb{P}\{X_2 = 0\}}.$$

En utilisant l'exercice 3 (feuille 5), la variable X_1 suit une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda := \mathbb{P}\{X_2 = 1\}/\mathbb{P}\{X_2 = 0\}.$$

De manière analogue, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}\{X_2 = n \,|\, X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_2 = n-1 \,|\, X_1 + X_2 = n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X_1 = 0 \,|\, X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 = n-1 \,|\, X_1 + X_2 = n\}} = \frac{C_n^0\, 2^{-n}}{C_n^1\, 2^{-n}} = \frac{1}{n}\,,$$

et

$$\frac{\mathbb{P}\{X_2 = n \,|\, X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_2 = n-1 \,|\, X_1 + X_2 = n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X_2 = n\}\,\mathbb{P}\{X_1 = 0\}}{\mathbb{P}\{X_2 = n-1\}\,\mathbb{P}\{X_1 = 1\}}\,.$$

On en déduit que

$$\frac{\mathbb{P}\{X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_2 = n-1\}} = \frac{\lambda'}{n} \quad \text{où } \lambda' := \frac{\mathbb{P}\{X_1 = 1\}}{\mathbb{P}\{X_1 = 0\}}.$$

Le résultat de l'exercice 3 (feuille 5) permet de conclure que la variable X_2 suit une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda' := \mathbb{P}\{X_1 = 1\}/\mathbb{P}\{X_1 = 0\}.$$

Finalement, lorsque X_1 est de Poisson de paramètre λ, on a :

$$\lambda' = \frac{\mathbb{P}\{X_1 = 1\}}{\mathbb{P}\{X_1 = 0\}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1/1!}{e^{-\lambda}\lambda^0/0!} = \lambda.$$