Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 2

Feuille de TD n° 1 2021

1. (*Exemples de tribus*)

   (a) (*Tribu trace*) Soit $E \subset \Omega$ arbitraire et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Alors,
   $$\mathscr{A}_E := \{E \cap A : A \in \mathscr{A}\}$$
   est une tribu *sur* E.

   (b) (*Tribu image*) Soit $(\Omega', \mathscr{B})$ un espace mesurable, Ω un ensemble et $f : \Omega \to \Omega'$ une application. Alors,
   $$\mathscr{A} := f^{-1}(\mathscr{B}') := \{f^{-1}(B') \colon B' \in \mathscr{B}'\}$$
   est une tribu.

   Indication: f^{-1} est stable pour les operations $\cup$, $\cap$, ^{c}.

   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\Omega := \{1, 2, 3, ..., 2k-1, 2k\}$. Alors,
   $$\mathscr{A} := \{A \subset \Omega \colon \sharp A \text{ est pair}\}$$
   est-elle une tribu?

2. (*Intersection quelconque de tribus est une tribu; tribu engendrée*)

   (a) Soit I un ensemble d'indices. Montrer que si $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus sur Ω, alors $\bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$ est aussi une tribu sur Ω, où
   $$\bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i := \left\{A \subset \Omega \,|\, \forall i \in I \colon A \in \mathscr{A}_i\right\}.$$

   (b) Pour tout $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{P}(\Omega)$ il existe alors une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ avec $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$, c'est-à-dire pour tout $\mathscr{A}'$ tribu avec $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}'$, on a $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$.

   Notation. On appelle $\mathscr{A}$ la *tribu engendrée par* $\mathscr{A}_0$ et la note $\sigma(\mathscr{A}_0)$ (cf. Remarque 5.5 du cours).

3. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les ensembles
   $$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}\right[\quad \text{et} \quad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}\right[.$$

   (b) Soit Ω un ensemble et $A, B \subset \Omega$. Trouver $\sigma(\{A\})$ et $\sigma(\{A, B\})$.

4. Soit Ω un ensemble, $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ une application et I un ensemble d'indices. Soient $A, A_i \subset \Omega$ et $B, B_i \subset \mathbb{R}^d$ $(i \in I)$. Rappelez-vous que nous dénotons
   $$X(A) := \{X(\omega) \colon \omega \in A\} \quad \text{et} \quad \{X \in B\} := X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\}.$$

Montrer que:

(a) $\{X \in B^c\} = \{X \in B\}^c$

(b) $\big\{X \in \bigcup_{i\in I} B_i\big\} = \bigcup_{i\in I}\{X \in B_i\}$

(c) $\big\{X \in \bigcap_{i\in I} B_i\big\} = \bigcap_{i\in I}\{X \in B_i\}$

(d) $X(A^c) \neq \big(X(A)\big)^c$ (en général)

(e) $X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} X(A_i)$

(f) $X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} X(A_i)$

5. Soit Ω un ensemble. La *fonction indicatrice* d'une partie $A \subset \Omega$ est

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 0, & \omega \notin A, \\ 1, & \omega \in A. \end{cases}$$

Pour les ensembles $A, B, A_1, A_2, ... \subset \Omega$, montrer que:

(a) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$

(b) $\mathbb{1}_{A\cup B} + \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$

(c) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

(d) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$

(e) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$

(f) $\sup_j \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{\cup_j A_j}$ et $\inf_j \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{\cap_j A_j}$.

Indication: Réfléchir sur les valeurs possibles de la fonction indicatrice pour ω donné.

6. Soit Ω un ensemble et $A, B, A_1, A_2, ... \subset \Omega$. On définit

$$\underline{A}_\infty := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n\geq m} A_n\right) \quad \text{et} \quad \overline{A}_\infty := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\geq m} A_n\right).$$

Montrer les rapports ci-dessous:

(a) On a:

$$\omega \in \underline{A}_\infty \Longleftrightarrow \omega \text{ appartient à tous les } A_n \text{ à partir d'un certain rang}$$
$$\omega \in \overline{A}_\infty \Longleftrightarrow \omega \text{ appartient à } A_n \text{ pour une infinité d'indices } n$$

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\underline{A}_\infty}$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\overline{A}_\infty}$

(c) $\{\mathbb{1}_{\overline{A}_\infty} = 1\} = \{\sum_n \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}$

Remarque: Il résulte des propriétés précédentes que $\underline{A}_\infty$ et $\overline{A}_\infty$ peuvent être compris comme des notions de limites inférieures et supérieures pour des ensembles, de manière analogue à la notion $\liminf / \limsup$ pour des fonctions.

Notes et informations du cours: `http://math.uni.lu/thalmaier/LEHRE/luxembourg_20-21.html`
Questions d'exercices: Guillaume Maillard, guillaume.maillard@uni.lu, MNO 0515-120