Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Probabilités et Statistique 2

Feuille de TD n° 3 2021

1. (a) Soient les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant des lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer qu'alors $X := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ suit aussi une loi exponentielle. Quel est son paramètre?

   (b) Vous êtes avec votre auto devant un parking plein avec 50 places, dans lesquelles les autos sont déposées pour 60 minutes en moyenne. Vous devez maintenant vous décider: vous attendez qu'une place se libère ou vous conduisez jusqu'au prochain parking, où il est sûr qu'il y a des places libres, mais qui est éloigné de 10 minutes de votre destination.

2. (a) Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent une loi exponentielle avec le paramètre constant λ. Alors $X := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ possède la densité:

$$f_X(t) = n\lambda\, e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}, \quad t \geq 0.$$

   (b) On vérifie:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

   Indication: Évaluer l'intégrale $\int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n]\, dt$ par changement de variable $u = 1 - e^{-\lambda t}$ et utiliser ensuite la formule: $(1 - u^n)/(1 - u) = 1 + u + \ldots + u^{n-1}$.

   (c) Un professeur de sport attend que ses 30 élèves changent de tenue. Les temps pour se changer sont indépendants et suivent une loi exponentielle avec une espérance de 5 minutes. Estimer après combien de minutes en moyenne le professeur pourra commencer son cours. (On a approximativement: $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \approx \log n$).

3. Deux entrepreneurs veulent se rencontrer à un certain endroit entre 20h00 et 21h00. Durant cette heure, ils arrivent de manière aléatoire et indépendamment l'un de l'autre. Aucun des deux n'est prêt à attendre plus de 10 minutes l'autre.

   (i) Avec quelle probabilité le rendez-vous aura-t-il lieu?

   (ii) Combien de temps chacun doit-il être prêt à attendre l'autre, pour que la probabilité de se rencontrer soit au moins de 70 %?

4. Jean-Dominique achète deux ampoules neuves: une de 60 Watts et une de 100 Watts. Selon le fabricant, la durée de vie de l'ampoule de 60 Watts suit une loi exponentielle avec une durée de vie moyenne de 200 heures. La durée de vie de l'ampoule de 100 Watts suit une loi exponentielle avec une durée de vie moyenne de 100 heures. Jean-Dominique se demande, avec quelle probabilité l'ampoule de 100 Watts fonctionnera plus longtemps que l'ampoule de 60 Watts.

   Indication: Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres λ et μ. Vérifier tout d'abord la formule

$$\mathbb{P}\{X < Y\} = \int_0^\infty f_X(t)\big(1 - F_Y(t)\big)\, dt$$

   où f_X désigne la densité de X et F_Y la fonction de répartition de Y. En déduire que:

$$\mathbb{P}\{X < Y\} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$