Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Probabilités et Statistique 2

Feuille de TD n° 4 2021

1. *Le problème de l'aiguille de Buffon* (1777)
Un plan est strié de droites parallèles espacées d'une distance 1. On lance au hasard une aiguille de longueur $\ell < 1$. Avec quelle probabilité l'aiguille coupe-t-elle une des droites? (Noter qu'on peut utiliser cette expérience pour estimer numériquement la valeur de π).

2. Si votre colocataire bloque la salle de bains, il ne vous reste plus qu'à attendre. Par expérience, vous savez qu'en moyenne celà dure environ 20 minutes. Le temps d'attente semble être sans mémoire.
   (a) Quelle est la probabilité que la salle de bains soit déjà libre après 10 minutes?
   (b) Pour combien de temps devriez-vous écouter de la musique et patienter jusqu'à la prochaine tentative, afin d'être sûr que la salle de bains est réellement libre avec une certitude de 90 %?

3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi et donc de même fonction de répartition F.
   (a) Trouver les fonctions de répartitions pour
$$M_* = \min_{1 \le i \le n} X_i \quad \text{et} \quad M^* = \max_{1 \le i \le n} X_i \,.$$
   (b) Si F est absolument continue avec densité f, determiner les densités de M_* et M^*.
   (c) Trouver la loi commune de M_* et M^*, c.à.d.
$$\mathbb{P}\left\{M_* \le x,\ M^* \le y\right\}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Une variable aléatoire X à valeurs réelles est dite suivre une *loi de Cauchy* si elle est absolument continue et admet pour densité
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Montrer que l'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'existe pas.
   (b) Soit U une v.a. uniformément répartie sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Alors $X = \tan U$ suit une loi de Cauchy.
   (c) Si X suit une loi de Cauchy, il en est de même de $1/X$.

5. Une variable aléatoire X à valeurs dans $]0, \infty[$ est dite suivre une *loi log-normale* de paramètres (μ, σ^2) (μ réel, $\sigma > 0$) si $Y = \log X$ suit une loi $N(\mu, \sigma^2)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition et la densité de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$.
   (c) Si X suit une loi log-normale de paramètres (μ, σ^2), alors X^r ($r > 0$) suit une loi log-normale de paramètres $(r\mu, r^2\sigma^2)$.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $N(0,1)$. Le couple (X,Y) étant considéré comme les coordonnées d'un point aléatoire du plan, on passe en coordonnées polaires:

$$R^2 = X^2 + Y^2, \quad \tan\Theta = Y/X.$$

   (a) Déterminer la loi conjointe de (R,Θ) et en déduire que R et Θ sont indépendantes.

   (b) Montrer que R^2 suit une loi exponentielle et que $\tan\Theta$ suit une loi de Cauchy.

   (c) Calculer

$$\mathbb{E}[R], \quad \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{R^2}\right], \quad \mathbb{E}\left[\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}\right].$$