

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Probabilités et Statistique 2

Feuille de TD n° 7

2021

1. (*Loi du chi-carré*) Soient X_1, \dots, X_n indépendantes et de loi $N(0, 1)$. La loi de la variable aléatoire $U_n := X_1^2 + \dots + X_n^2$ s'appelle *loi du chi-carré à n -degrés de liberté*; on la note χ_n^2 . Montrer que χ_n^2 admet la densité

$$f_{\chi_n^2}(t) = \frac{t^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-t/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $\Gamma(z)$ est la *fonction gamma*, définie par

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0.$$

2. (*Vecteur gaussien et densité*)

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ gaussien de moyenne μ et de matrice variance-covariance C , c.à.d. pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, la variable $\langle a, X \rangle$ suit une loi normale telle que

$$\mu = \mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]) \quad \text{et} \quad C \in \text{Matr}(n \times n; \mathbb{R}), \quad C_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j).$$

Montrer:

- (a) La loi de X est absolument continue si et seulement si C inversible.
(b) Si C est inversible, alors X admet pour densité la fonction

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{\langle x - \mu, C^{-1}(x - \mu) \rangle}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

3. (*Intervalle de confiance pour une espérance*)

Une machine fabrique des billes métalliques dont le poids, mesuré en grammes, suit une loi normale. Nous prélevons au hasard 10 billes. Leurs poids sont

19,6 20 20,2 20,1 20 19,9 20 20,3 20,1 19,8

- (a) Quel est l'intervalle de confiance à 95% du poids des billes métalliques fabriquées, si l'écart-type σ de la population est inconnu?
(b) En réalité, l'écart-type σ est connu et égal à 0,2. Quel est l'intervalle de confiance à 95% du poids des billes métalliques fabriquées?