

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 2

Corrigé TD n° 1

2021

1. Rappelons qu'une tribu (σ -algèbre) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sur Ω est une famille d'ensembles telle que

$$(\Sigma_1) \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \text{ (i.e. } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

Nous allons vérifier (Σ_1) – (Σ_1) :

(a) (*Tribu trace*) Soit $E \subset \Omega$ arbitraire et \mathcal{A} une tribu sur Ω . Alors,

$$\mathcal{A}_E := \{E \cap A : A \in \mathcal{A}\}$$

est une tribu sur E .

$$(\Sigma_1) \Omega \in \mathcal{A} \implies \Omega \cap E \in \mathcal{A}_E.$$

(Σ_2) Soit $A \cap E \in \mathcal{A}_E$, alors

$$(A \cap E)^c = (\Omega \cap E) \setminus (A \cap E) = A^c \cap E.$$

et $A^c \in \mathcal{A}$ (comme \mathcal{A} est une tribu). Donc: $(A \cap E)^c \in \mathcal{A}_E$.

(Σ_3) Pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (comme \mathcal{A} est une tribu). Alors, pour $A_n \cap E \in \mathcal{A}_E$,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap E) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap E \in \mathcal{A}_E.$$

Donc, \mathcal{A}_E est une tribu (sur E).

(b) (*Tribu image*) Soit (Ω', \mathcal{B}) un espace mesurable, Ω un ensemble et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application. Alors,

$$\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

est une tribu.

Indication: f^{-1} est stable pour les opérations $\cup, \cap, ^c$.

(Σ_1) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A}$ parce que $\emptyset \in \mathcal{B}$.

(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \xrightarrow{\text{def. } \mathcal{A}} \exists B \in \mathcal{B} : A = f^{-1}(B)$

$$\xrightarrow{\mathcal{B} \text{ tribu}} B^c \in \mathcal{B} : A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$$

$$\implies A^c \in \mathcal{A}.$$

(Σ_3) Pour $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$

$$\xrightarrow{\text{def. } \mathcal{A}} \exists B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B} : A_n = f^{-1}(B_n), n \in \mathbb{N}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{B} \text{ tribu}} \exists B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B} : \bigcup_n A_n = \bigcup_n f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right)$$

$$\implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}.$$

Donc, \mathcal{A} est une tribu.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\Omega := \{1, 2, 3, \dots, 2k - 1, 2k\}$.

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : \#A \text{ est pair}\}$$

est-elle une tribu ?

(Σ_1) $\#\Omega = 2k$ est pair, alors $\Omega \in \mathcal{A}$

(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \implies \#A \text{ est pair} \implies \#A^c = 2k - \#A$ parce que $\#A \text{ est pair} \implies A^c \in \mathcal{A}$

(Σ_3) Mais: $\{1, 2\}, \{2, 3\} \in \mathcal{A} \implies \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin \mathcal{A}$

Donc, \mathcal{A} n'est pas une tribu.

2. (Une intersection quelconque de tribus est une tribu, tribu engendrée)

(a) Soit I un ensemble d'indices. Montrer que si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus sur Ω , alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est aussi une tribu sur Ω , où

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A : \forall i \in I : A \in \mathcal{A}_i\}.$$

(Σ_1) $\forall i \in I : \emptyset \in \mathcal{A}_i$ (chaque \mathcal{A}_i est tribu) $\implies \emptyset \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

(Σ_2) On a:

$$\begin{aligned} A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i &\implies \forall i \in I : A \in \mathcal{A}_i \\ &\underset{\mathcal{A}_i \text{ tribu}}{\implies} \forall i \in I : A^c \in \mathcal{A}_i \\ &\implies A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i. \end{aligned}$$

(Σ_3) Soit $(A_n) \subset \mathcal{A}_i$ pour tout i . Alors, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}_i$ par (Σ_3) pour tout i . Donc, $\bigcup_n A_n \in \bigcap_i \mathcal{A}_i$.

(b) Pour tout $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ il existe alors une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, c'est-à-dire pour tout \mathcal{A}' tribu avec $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}'$, on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

Notation: $\sigma(\mathcal{A}_0)$, la tribu engendrée par \mathcal{A}_0 (cf. Remarque 5.5).

De (a),

$$\mathcal{A} := \bigcap_{\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}, \mathcal{B} \text{ tribu}} \mathcal{B} \quad (\star)$$

est une tribu. Choisissons $\mathcal{B} := \mathcal{P}(\Omega)$ (la plus grande possible!), (\star) est bien définie (l'intersection n'est pas vide). \mathcal{A} est minimale car si l'on suppose qu'il y a une autre tribu \mathcal{A}' avec $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}'$, alors \mathcal{A}' est dans l'intersection (\star). Donc, $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$.

3. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les ensembles $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j})$ et $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j})$.

En utilisant la convention $[a, b) = \emptyset$, si $a \geq b$, on a

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j} \right) = [a + 1, b - 1).$$

En effet: Si x est dans l'intersection, alors $x \geq \sup_j \left(a + \frac{1}{j} \right) = a + \frac{1}{1}$. On peut argumenter de la même façon pour la borne droite. De même:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j} \right) = (a, b).$$

(b) Soit Ω un ensemble et $A, B \subset \Omega$. Trouver $\sigma(\{A\})$ et $\sigma(\{A, B\})$.

Il est évident, que $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Comment trouver $\sigma(\{A, B\})$?

D'abord,

- i. Commencer avec les ensembles triviaux et donné: \emptyset, Ω, A, B
- ii. Ajouter leurs compléments: A^c, B^c
- iii. Ajouter leurs réunions, intersections et différences: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$
- iv. Ajouter les compléments des ensembles dans iii:

$$A^c \cap B^c, A^c \cup B^c, (A \setminus B)^c, (B \setminus A)^c$$

- v. Finalement, ajouter leurs réunions de différences et leurs compléments:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A), (A \setminus B)^c \cap (B \setminus A)^c$$

En tout on a des 16 ensembles, mais il pourrait se faire que quelques ensembles apparaissent deux fois. Il y a une procédure plus systématique:

Définition. Un *atome* d'une tribu \mathcal{A} est un ensemble non-vidé $\emptyset \neq A \in \mathcal{A}$ tel que A ne contient pas un autre ensemble de \mathcal{A} .

Comme \mathcal{A} est stable pour l'intersection, on a que tous les atomes sont des ensembles disjoints. Donc, nous pouvons construire tous les ensembles de \mathcal{A} comme une réunion d'atomes. Les atomes sont: $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B, (A \cup B)^c$. C'est un pavage de Ω formé seulement d'ensembles disjoints. Alors, les ensembles A, B peuvent être retrouvés par réunion. En plus, il est minimal car ces ensembles doivent apparaître dans $\sigma(\{A, B\})$. Finalement, on a

Théorème. Si \mathcal{A} est une tribu avec (un nombre fini) N d'atomes, alors \mathcal{A} se compose de 2^N éléments.

Donc,

$$\begin{aligned} A, B \in \sigma(\{A, B\}) &\implies A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B^c \in \sigma(\{A, B\}) \\ &\implies \{A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B^c\} \subset \sigma(\{A, B\}) \\ &\implies \sigma(\{A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B^c\}) \subset \sigma(\{A, B\}) \\ &\stackrel{(\star)}{\implies} \sigma(\{A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B^c\}) = \sigma(\{A, B\}). \end{aligned}$$

où pour (\star) , on utilise que

$$\left. \begin{aligned} A &= A \cap B \cup A \cap B^c \\ B &= A \cap B \cup A^c \cap B \end{aligned} \right\} \in \sigma(\{A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B^c\}).$$

(f) Pour $j \in I$ on obtient

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j &\implies X\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset X(A_j) \\ &\implies X\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{j \in I} X(A_j) \end{aligned}$$

Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$ et $X(1) = X(3) = 0$, $X(2) = 1$, alors, pour $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, on a $X(A \cap B) = X(\{2\}) = \{1\}$, mais

$$X(A) \cap X(B) = X(\{1, 2\}) \cap X(\{2, 3\}) = \{0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}.$$

5. Soit Ω un ensemble. La *fonction caractéristique* (ou *fonction indicatrice*) d'une partie $A \subset \Omega$ est

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 0, & \omega \notin A, \\ 1, & \omega \in A. \end{cases}$$

Pour les ensembles $A, B, A_1, A_2, \dots \subset \Omega$, montrer que:

- | | |
|---|--|
| (a) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$ | (d) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$ |
| (b) $\mathbb{1}_{A \cup B} + \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ | (e) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$ |
| (c) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$ | (f) $\sup_j \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{\cup_j A_j}$ et $\inf_j \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{\cap_j A_j}$. |

Indication: Réfléchir sur les valeurs possibles de la fonction caractéristique pour un ω donné.

Pouvez-vous montrer (c) sans utiliser (b) ?

(a)

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A^c(\omega) &= \begin{cases} 0, & \omega \in A, \\ 1, & \omega \notin A. \end{cases} \\ &= 1 - \mathbb{1}_A. \end{aligned}$$

(b) Rappeler que

$$A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Considérons les quatre cas

$$\omega \in A \setminus B, \quad \omega \in B \setminus A, \quad \omega \in A \cap B \quad \text{et} \quad \omega \in (A \cup B)^c.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_{A \cup B} + \mathbb{1}_{A \cap B})(\omega) &= \begin{cases} 0 & \omega \notin A, \omega \notin B \\ 1 & \omega \in A \Delta B \\ 2 & \omega \in A \cap B \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B. \end{aligned}$$

- (c) Sans utiliser (b): D'abord, comme $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ est *disjoint*, on obtient que $\mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) + \mathbb{1}_{A \setminus B}(\omega)$ ne peut jamais prendre la valeur 2. Donc,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_{(A \cap B) \cup (A \setminus B)}(\omega) = \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) + \mathbb{1}_{A \setminus B}(\omega) = 1.$$

Comme $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ et $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cup B}(\omega) &= \mathbb{1}_{(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)}(\omega) \\ &= \mathbb{1}_{A \setminus B}(\omega) + \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) + \mathbb{1}_{B \setminus A}(\omega) \\ &= \mathbb{1}_A(\omega) - \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) + \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}. \end{aligned}$$

- (d)

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cup B}(\omega) = 1 &\iff x \in A \cup B \\ &\iff x \in A \vee x \in B \\ &\iff \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) \geq 1 \\ &\iff \begin{cases} \max\{\mathbb{1}_A(\omega), \mathbb{1}_B(\omega)\} &= 1 \\ \min\{\mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega), 1\} &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- (e)

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = 1 &\iff x \in A \cap B \\ &\iff x \in A \wedge x \in B \\ &\iff \mathbb{1}_A(\omega) = 1 = \mathbb{1}_B(\omega) \\ &\iff \begin{cases} \mathbb{1}_A(\omega) \cdot \mathbb{1}_B(\omega) &= 1 \\ \min\{\mathbb{1}_A(\omega), \mathbb{1}_B(\omega)\} &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- (f) Nous commençons avec $\sup_j \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{\cup_j A_j}$: Il est évident que le côté droit et gauche de l'égalité peuvent avoir seulement les valeurs 0 et 1. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\cup_j A_j}(\omega) = 1 &\iff \omega \in \bigcup_j A_j \\ &\iff \exists j_0 \in \mathbb{N} : \omega \in A_{j_0} \\ &\iff \exists j_0 \in \mathbb{N} : \mathbb{1}_{A_{j_0}}(\omega) = 1 \\ &\iff \sup_j \mathbb{1}_{A_j}(\omega) = 1. \end{aligned}$$

On pourrait mimer la démonstration ci-dessus ou utiliser les lois de De Morgan:

$$\mathbb{1}_{\cap_j A_j} = \mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_{\cup_j A_j^c} = 1 - \sup_j \mathbb{1}_{A_j^c} = \inf_j (1 - \mathbb{1}_{A_j^c}) = \inf_j \mathbb{1}_{A_j}$$

Remarque: Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable et $\omega \in \Omega$. La *mesure de Dirac* $\delta_\omega : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ est définie pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 0, & \omega \notin A \\ 1, & \omega \in A. \end{cases}$$

En effet δ_ω est une mesure. Comme il est évident que $\delta_\omega(A) = \mathbb{1}_A(\omega)$, alors toutes les propositions ci-dessus suivent par des propriétés connues de mesures.

6. Soit Ω un ensemble et $A, B, A_1, A_2, \dots \subset \Omega$. On définit

$$\underline{A}_\infty := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geq m} A_n \right) \quad \text{et} \quad \overline{A}_\infty := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq m} A_n \right).$$

Montrer les relations ci-dessous:

(a) On a:

$$\omega \in \underline{A}_\infty \iff \omega \text{ appartient à tous les } A_n \text{ à partir d'un certain rang}$$

$$\omega \in \overline{A}_\infty \iff \omega \text{ appartient à } A_n \text{ pour une infinité d'indices } n$$

(b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\underline{A}_\infty}$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\overline{A}_\infty}$

(c) $\{\mathbb{1}_{\overline{A}_\infty} = 1\} = \{\sum_n \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}$

Remarque: Il résulte des propriétés précédentes que \underline{A}_∞ et \overline{A}_∞ peuvent être compris comme des notions de limites inférieures et supérieures pour des ensembles, de manière analogue à la notion connue de limite \liminf / \limsup pour des fonctions.

(a) Les conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} \omega \in \underline{A}_\infty &\iff \exists m_0 \in \mathbb{N} : \omega \in \bigcap_{n \geq m_0} A_n \\ &\iff \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 : \omega \in A_n \\ &\iff \omega \text{ appartient à tous les } A_n \text{ à partir d'un certain rang.} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega \in \overline{A}_\infty &\iff \forall m \in \mathbb{N} : \omega \in \bigcup_{n \geq m} A_n \\ &\iff \forall m \in \mathbb{N} \exists n_0(m) \geq m : \omega \in A_{n_0(m)} \\ &\iff \omega \text{ appartient à } A_n \text{ pour une infinité d'indices } n. \end{aligned}$$

(b) Soit $\omega \in \Omega$ fixe. Si la fonction caractéristique peut prendre seulement les valeurs 0 et 1, alors $(\mathbb{1}_{A_n}(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de valeurs zéro et un. Par (a), on obtient:

$$\begin{aligned} \omega \in \underline{A}_\infty &\iff \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ suffisamment grand} \\ &\iff \omega \in A_n \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ suffisamment grand} \\ &\iff \omega \in \liminf A_n. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega \in \overline{A}_\infty &\iff \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \omega \in \limsup A_n. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \omega \in \overline{A}_\infty &\iff \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \text{ pour } n \text{ infiniment souvent} \\ &\iff \sum_n \mathbb{1}_{A_n} = \infty. \end{aligned}$$