

Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 2

Corrigé TD 2

2021

1. Soit X une variable aléatoire de densité:

$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha t^2(1-t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Quelle est la valeur de α ?

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = \int_0^1 f_X(t) dt = \alpha \int_0^1 t^2(1-t) dt \\ &= \alpha \int_0^1 (t^2 - t^3) dt = \alpha \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \alpha \frac{4-3}{12} = \frac{\alpha}{12}, \end{aligned}$$

d'où $\alpha = 12$.

(b) Déterminer la fonction de répartition F de X . Pour $0 \leq x \leq 1$ on a

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t) dt = 12 \int_0^x t^2(1-t) dt = 12 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) = 4x^3 - 3x^4,$$

donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 4x^3 - 3x^4 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(c) Déterminer l'espérance et la variance de X .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \alpha \int_0^1 t^3(1-t) dt = \alpha \int_0^1 (t^3 - t^4) dt \\ &= \alpha \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = 12 \frac{5-4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t) dt = \alpha \int_0^1 t^4(1-t) dt = \alpha \int_0^1 (t^4 - t^5) dt \\ &= \alpha \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} \right]_0^1 = \alpha \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = 12 \frac{6-5}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{10-9}{25} = \frac{1}{25}, \\ \sigma(X) &= \sqrt{\text{var}(X)} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(d) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\{X > 1/2\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{X > \frac{1}{2}\right\} &= 1 - \mathbb{P}\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{4}{2^3} - \frac{3}{2^4}\right) = 1 - \left(\frac{4}{8} - \frac{3}{16}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}.\end{aligned}$$

2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $Y := X^2$.

Pour $0 \leq t \leq 1$ on a

$$\mathbb{P}\{Y \leq t\} = \mathbb{P}\{X^2 \leq t\} = \mathbb{P}\{X \leq \sqrt{t}\} = \sqrt{t}.$$

La fonction de répartition de X^2 se calcule ainsi:

$$F_{X^2}(t) = F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ \sqrt{t}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

La fonction F_Y est dérivable sur l'intervalle $]0, 1[$ avec

$$\frac{d}{dt}F_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

et par conséquent la fonction suivante

$$f_Y(t) = f_{X^2}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{t}}, & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

est une densité pour la variable aléatoire $Y = X^2$.

3. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors $f_X = \mathbb{1}_{[0,1]}$, c.à.d.,

$$\forall 0 \leq a \leq b \leq 1, \quad \mathbb{P}\{X \in [a, b]\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = \int_a^b 1 dt = b - a.$$

Considérons

$$Y := \max\{X, 1 - X\} \equiv X \vee (1 - X),$$

$$Z := \min\{X, 1 - X\} \equiv X \wedge (1 - X).$$

On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y \leq a\} &= \mathbb{P}\{X \leq a, 1 - X \leq a\} \\ &= \mathbb{P}\{X \leq a, X \geq 1 - a\} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq a \leq \frac{1}{2}, \\ 2a - 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq a \leq 1, \end{cases}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Z > a\} &= \mathbb{P}\{X > a, 1 - X > a\} \\ &= \mathbb{P}\{X > a, X < 1 - a\} = \begin{cases} 1 - 2a, & \text{si } 0 \leq a \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq a \leq 1, \end{cases}\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}\{Z \leq a\} = \begin{cases} 2a, & \text{si } 0 \leq a \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq a \leq 1. \end{cases}$$

(a) On a

$$\mathbb{P}\left\{Y > \frac{3}{4}\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{Y \leq \frac{3}{4}\right\} = 1 - \left(2 \cdot \frac{3}{4} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Les densités sont données par:

$$f_Y = 2 \cdot \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]} \quad \text{et} \quad f_Z = 2 \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}.$$

(c) On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}.$$

(d) Pour $Z = X \wedge (1 - X)$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \wedge (1 - X)] &= \mathbb{E}[Z] = \int_0^1 t f_Z(t) dt \\ &= \int_0^1 2t \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]} dt \\ &= 2 \int_0^{1/2} t dt = 2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1/2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Une autre méthode de calcul est:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \wedge (1 - X)] &= \int_0^1 t \wedge (1 - t) f_X(t) dt \\ &= \int_0^1 t \wedge (1 - t) dt \\ &= \int_0^{1/2} \dots dt + \int_{1/2}^1 \dots dt \\ &= \int_0^{1/2} t dt + \int_{1/2}^1 (1 - t) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1/2} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=1/2}^{t=1} \\ &= \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$.

(a) On pose

$$X = 1 + \left\lceil \frac{\log U}{\log q} \right\rceil, \quad q \in]0, 1[.$$

Pour montrer que X suit une loi géométrique, il faut trouver un paramètre $p \in]0, 1[$ tel que

$$\forall n = 1, 2, \dots, \quad \mathbb{P}\{X = n\} = (1 - p)^{n-1}p.$$

On remarque qu'on a nécessairement $p = \mathbb{P}\{X = 1\}$. Pour tout n , on vérifie

$$\begin{aligned} X = n &\iff \left\lceil \frac{\log U}{\log q} \right\rceil = n - 1 \\ &\iff n - 1 \leq \frac{\log U}{\log q} < n \\ &\iff (-\log q)(n - 1) \leq -\log U < (-\log q)n \\ &\iff \log(q^n) < \log U \leq \log(q^{n-1}) \\ &\iff q^n < U \leq q^{n-1}, \end{aligned}$$

d'où, puisque U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$,

$$\mathbb{P}\{X = n\} = \mathbb{P}\{q^n < U \leq q^{n-1}\} = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1 - q),$$

et donc en particulier,

$$\mathbb{P}\{X = 1\} = p = 1 - q.$$

Par conséquent, la variable X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

(b) Soit maintenant

$$X = -(\log U)/\alpha \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

Comme

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}\{X \leq t\} = \mathbb{P}\{-(\log U)/\alpha \leq t\} = \mathbb{P}\{\log U \geq -\alpha t\} \\ &= \mathbb{P}\{U \geq e^{-\alpha t}\} = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

on trouve que

$$f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

est une densité pour X . Par conséquent, la variable X suit une loi exponentielle de paramètre α .

5. Soient \mathbb{P}, \mathbb{Q} des mesures de probabilité sur \mathbb{R} admettant des densités p et q , c.à.d.,

$$\text{Pour tout intervalle } A \text{ dans } \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(A) = \int_A p(t) dt \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(A) = \int_A q(t) dt.$$

On note

$$H(\mathbb{P}) := - \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \log p(t) dt = -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\log p(\cdot)], \quad \text{respectivement,}$$

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) := \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \log \frac{q(t)}{p(t)} dt = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{q(\cdot)}{p(\cdot)} \right].$$

En posant

$$u(x) := x \log x, \quad x \geq 0,$$

on remarque que $u(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$. Puis on écrit

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \frac{q(t)}{p(t)} \log \frac{q(t)}{p(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) u \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) dt$$

avec la convention

$$p(t) u \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p(t) = 0 \text{ et } q(t) = 0, \\ \infty & \text{si } p(t) = 0 \text{ et } q(t) > 0. \end{cases}$$

En utilisant que

$$u(x) = x \log x \geq x - 1, \quad x \geq 0,$$

on obtient l'estimation:

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \geq \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \left[\frac{q(t)}{p(t)} - 1 \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1 - 1 = 0.$$

En plus,

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0 \iff H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) - \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \left[\frac{q(t)}{p(t)} - 1 \right] dt = 0$$

$$\iff \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \left[u \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) - \left(\frac{q(t)}{p(t)} - 1 \right) \right] dt = 0.$$

On remarque que $p(t) \geq 0$ et que $u(x) - (x - 1) = 0$ si et seulement si $x = 1$, donc on obtient

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0 \iff (\forall t \in \mathbb{R}, \text{ si } p(t) > 0, \text{ alors } \frac{q(t)}{p(t)} = 1) \iff \mathbb{P} = \mathbb{Q}.$$

(a) Soit \mathbb{P} la loi uniforme sur $[a, b]$, c.à.d.,

$$p(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t),$$

et soit \mathbb{Q} une autre mesure de probabilité concentrée sur $[a, b]$ (notamment $q(t) = 0$ sur $[a, b]^c$). Alors on a

$$\begin{aligned}
H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) &= \int_a^b q(t) \log \frac{q(t)}{p(t)} dt \\
&= \int_a^b q(t) \log (q(t)(b-a)) dt \\
&= \int_a^b q(t) [\log q(t) + \log(b-a)] dt \\
&= \int_a^b q(t) \log q(t) dt + \log(b-a) \int_a^b q(t) dt \\
&= -H(\mathbb{Q}) + \log(b-a).
\end{aligned}$$

Avec $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ on obtient d'une part

$$0 = H(\mathbb{P}|\mathbb{P}) = -H(\mathbb{P}) + \log(b-a),$$

et par conséquent,

$$H(\mathbb{P}) = \log(b-a),$$

d'autre part on obtient la formule suivante:

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = -H(\mathbb{Q}) + H(\mathbb{P}) \geq 0,$$

qui donne

$$H(\mathbb{P}) \geq H(\mathbb{Q}).$$

Conclusion On a $H(\mathbb{P}) \geq H(\mathbb{Q})$ pour toute mesure de probabilité \mathbb{Q} sur $[a, b]$.

(b) Soit \mathbb{P} la loi exponentielle de paramètre α sur $[0, \infty[$, c.à.d.,

$$p(t) = \alpha e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(t),$$

et soit \mathbb{Q} une autre mesure de probabilité sur $[0, \infty[$ d'espérance $1/\alpha$.

Alors on a

$$\begin{aligned}
0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) &= \int_0^\infty q(t) \log \frac{q(t)}{p(t)} dt \\
&= \int_0^\infty q(t) \log \frac{q(t)}{\alpha e^{-\alpha t}} dt \\
&= \int_0^\infty q(t) [\log q(t) - \log \alpha + \alpha t] dt \\
&= \int_0^\infty q(t) \log q(t) dt - \log \alpha \underbrace{\int_0^\infty q(t) dt}_{=1} + \alpha \underbrace{\int_0^\infty t q(t) dt}_{=1/\alpha} \\
&= -H(\mathbb{Q}) - \log \alpha + 1.
\end{aligned}$$

Avec $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ on obtient d'une part

$$0 = H(\mathbb{P}|\mathbb{P}) = -H(\mathbb{P}) - \log \alpha + 1,$$

et par conséquent,

$$H(\mathbb{P}) = 1 - \log \alpha,$$

d'autre part on obtient la formule suivante:

$$0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = -H(\mathbb{Q}) + H(\mathbb{P}),$$

qui donne,

$$H(\mathbb{P}) \geq H(\mathbb{Q}).$$

Conclusion On a $H(\mathbb{P}) \geq H(\mathbb{Q})$ pour toute mesure de probabilité \mathbb{Q} sur $[0, \infty[$ d'espérance $1/\alpha$.

(c) Soit \mathbb{P} loi gaussienne $N(\mu, \sigma^2)$ sur \mathbb{R} d'espérance μ et variance σ^2 , c.à.d.,

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

et soit \mathbb{Q} une autre mesure de probabilité sur \mathbb{R} d'espérance μ et variance σ^2 .

Alors on peut calculer:

$$\begin{aligned} 0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \log \frac{q(t)}{p(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \left[\log q(t) + \log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \log q(t) dt + \log \sqrt{2\pi\sigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt}_{=1} + \frac{1}{2\sigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 q(t) dt}_{=\sigma^2} \\ &= -H(\mathbb{Q}) + \log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2} = -H(\mathbb{Q}) + \log \sqrt{2\pi\sigma^2} e. \end{aligned}$$

Pour $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ on obtient d'une part la formule

$$H(\mathbb{P}) = \log \sqrt{2\pi\sigma^2} e,$$

par ailleurs on a

$$0 \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = -H(\mathbb{Q}) + H(\mathbb{P}),$$

qui donne,

$$H(\mathbb{P}) \geq H(\mathbb{Q}).$$

Conclusion On a $H(\mathbb{P}) \geq H(\mathbb{Q})$ pour toute probabilité \mathbb{Q} sur \mathbb{R} d'espérance μ et variance σ^2 .