Bachelor académique en Sciences et Ingénierie
Probabilités et Statistique 2

Corrigé TD 3 2021

---

1. (a) Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant des lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Considérons

$$X := \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Alors, pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X > t\} &= \mathbb{P}\{X_1 > t, \ldots, X_n > t\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X_i > t\} = \prod_{i=1}^{n} \int_t^{\infty} \lambda_i \, e^{-\lambda_i s} ds \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t} = e^{-\lambda t}, \quad \text{avec } \lambda := \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\{X \leq t\} = 1 - \mathbb{P}\{X > t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Donc X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

(b) On note X_i le temps jusqu'à ce que la voiture i libère sa place.
En utilisant la *modélisation avec la loi exponentielle*, on se trouve dans la situation suivante: $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et suivant des lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On remarque que

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{\lambda_i} = 60 \text{ min}; \;\; \text{par conséquent, } \lambda_i = \frac{1}{60}, \; i = 1, \ldots, 50.$$

Alors

$$X := \min\{X_1, \ldots, X_{50}\}$$

décrit le *temps jusqu'à ce que la première place se libère.*

Par la partie (a) on sait que X suit une loi exponentielle de paramètre

$$\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{50} = \underbrace{\frac{1}{60} + \ldots + \frac{1}{60}}_{50 \text{ fois}} = \frac{50}{60},$$

et par conséquent,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{60}{50} = 1,2 \text{ min} \ll 10 \text{ min}.$$

2. (a) Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant des lois exponentielles de même paramètre λ. Considérons

$$X := \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Alors, pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_X(t) = \mathbb{P}\{X \leq t\} &= \mathbb{P}\{X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \leq t\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_n \leq t\} \\ &= (1 - e^{-\lambda_1 t}) \cdot \ldots \cdot (1 - e^{-\lambda_n t}) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^n. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f_X(t) = F'_X(t) = n\lambda\,(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}\, e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{et } f_X(t) = 0, \quad t < 0).$$

(b) En utilisant le changement de variable $u = 1 - e^{-\lambda t}$, c.à.d.

$$\frac{du}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} = \lambda\,(1 - u) \quad \text{ou} \quad dt = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{1-u}\,du,$$

on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{X > t\}\,dt \\ &= \int_0^\infty \left[1 - (1 - e^{-\lambda t})^n\right]\,dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\,du \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \left(1 + u + \ldots + u^{n-1}\right) du \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^n}{n}\right]_{u=0}^{u=1} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

(c) Soit X_i le temps dont l'élève i a besoin pour changer de vêtements, $i = 1, \ldots, 30$. Alors les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre λ. En plus,

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{\lambda} = 5 \text{ min} \quad (\text{par conséquent, } \lambda = \frac{1}{5}).$$

Puis on obtient

$$\mathbb{E}[X] = 5\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{30}\right) \approx 5 \log 30 \approx 5\ \cdot 3,402 \approx 17 \text{ min}.$$

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 60]$, avec l'interprétation suivante:

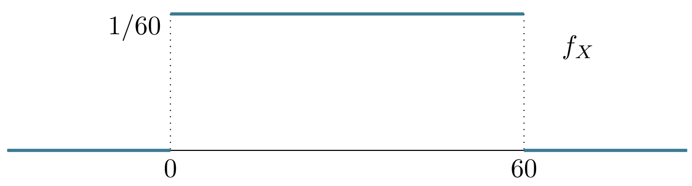
$$\begin{aligned} X &\equiv \text{ l'heure d'arrivée de l'entrepreneur } A \text{ (en minutes après 20h), et} \\ Y &\equiv \text{ l'heure d'arrivée de l'entrepreneur } B \text{ (en minutes après 20h).} \end{aligned}$$

(i) Le but est de calculer $\mathbb{P}\big\{|X-Y|\leq 10\big\}$. Pour le calcul on utilise les densités explicites:

$$\text{densité de } X\text{:}\qquad f_X(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & t\in[0,60]\\ 0\ , & t\notin[0,60]\end{cases}$$

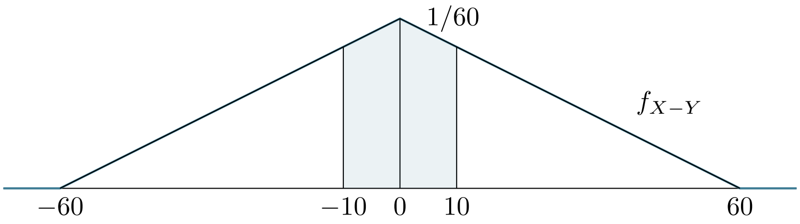
$$\text{densité de } Y\text{:}\qquad f_Y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & t\in[0,60]\\ 0\ , & t\notin[0,60]\end{cases}$$

$$\text{densité de } -Y\text{:}\qquad f_{-Y}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & t\in[-60,0]\\ 0\ , & t\notin[-60,0]\end{cases}\qquad = f_Y(-t).$$



La densité de $X-Y\equiv X+(-Y)$ est donc donnée par le produit de convolution suivant:

$$\begin{aligned}
f_{X-Y}(t)=(f_X*f_{-Y})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,f_{-Y}(t-s)\,ds\\
&= \frac{1}{60}\int_0^{60} f_{-Y}(t-s)\,ds\\
&= \frac{1}{60}\int_0^{60} f_{Y}(s-t)\,ds\\
&= \frac{1}{60^2}\int_0^{60} \mathbb{1}_{[0,60]}(s-t)\,ds\\
&= \frac{1}{60^2}\int_{-t}^{60-t} \mathbb{1}_{[0,60]}(u)\,du\\
&= \frac{\big|[-t,60-t]\cap[0,60]\big|}{60^2}\\
&= \begin{cases}\dfrac{60-|t|}{60^2}, & |t|\leq 60,\\ \quad 0 \quad\ , & |t|\geq 60,\end{cases}
\end{aligned}$$



où on a utilisé que

$$[-t, 60-t] \cap [0,60] = \begin{cases} [0, 60-t], & 0 \le t \le 60, \\ [-t, 60], & -60 \le t \le 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big\{|X-Y| \le 10\big\} &= \mathbb{P}\big\{-10 \le X-Y \le 10\big\} \\ &= \int_{-10}^{10} f_{X-Y}(t)\,dt \\ &= 2\int_0^{10} f_{X-Y}(t)\,dt \\ &= \frac{2}{60^2}\int_0^{10} (60-t)\,dt \\ &= \frac{2}{60^2}\left[60t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{10} \\ &= \frac{2}{60^2}(600-50) \\ &= \frac{1100}{60^2} = \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

(ii) En utilisant que

$$\mathbb{P}\big\{|X-Y| \le L\big\} = \frac{2}{60^2}\left(60L - \frac{L^2}{2}\right) = \frac{L}{30} - \frac{L^2}{60^2},$$

on trouve que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big\{|X-Y| \le L\big\} = 0.7 &\iff L^2 - 120L + 0.7 \cdot 60^2 = 0 \\ &\iff L^2 - 120L + 2520 = 0. \end{aligned}$$

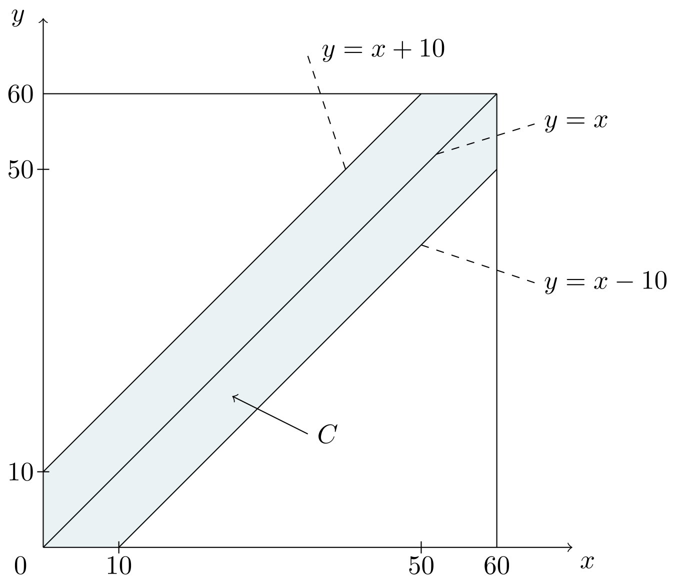
La solution positive de cette équation quadratique est $L \approx 27$.

Conclusion On doit attendre au moins 27 min pour que la probabilité de se recontrer soit au moins de 70 %.

Remarque Une autre méthode de calcul pour (i) est:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big\{|X-Y| \le 10\big\} &= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{|X-Y|\le 10\}}\big] \\ &= \frac{1}{60^2}\int_0^{60}\int_0^{60} \mathbb{1}_{\{|x-y|\le 10\}}(x,y)\,dxdy \\ &= \frac{\text{l'aire de } \big\{(x,y) \in [0,60]^2 : |x-y| \le 10\big\}}{60^2} \\ &= \frac{\text{l'aire de } C}{60^2} \\ &= \frac{60 \times 60 - 50 \times 50}{60^2} \\ &= \frac{36-25}{36} = \frac{11}{36}, \end{aligned}$$

où $C := \big\{(x,y) \in [0,60]^2 : |x-y| \le 10\big\}$.



4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités f_X, resp. f_Y. On constate d'abord, comme les variables X et Y sont indépendantes, que le couple (X,Y) a la densité commune

$$f_{X,Y}(s,t) = f_X(s)\, f_Y(t), \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

En utilisant la formule

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(s,t)\, f_{X,Y}(s,t)\, dsdt,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X<Y\} = \mathbb{E}[1_{\{X<Y\}}] &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{s<t\}}\, f_{X,Y}(s,t)\, dsdt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{s<t\}}\, f_X(s)\, f_Y(t)\, dsdt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{s<t\}}\, f_X(s)\, f_Y(t)\, dsdt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{s<t\}} f_Y(t) dt \right] ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, \mathbb{P}\{Y > s\}\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, [1 - F_Y(s)]\, ds,
\end{aligned}$$

où F_Y est la fonction de répartition de Y.

Supposons maintenant que X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ, c.à.d.,

$$f_X(s) = \lambda\, e^{-\lambda s}\, 1_{\{s \ge 0\}} \quad \text{et} \quad f_Y(s) = \mu\, e^{-\mu s}\, 1_{\{s \ge 0\}},$$

en particulier,

$$\forall s \geq 0, \quad F_X(s) = 1 - e^{-\lambda s} \quad \text{et} \quad F_Y(s) = 1 - e^{-\mu s}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X < Y\} &= \int_0^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda s}\, e^{-\mu s}\, ds = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)s}\, ds \\ &= \lambda \left[-\frac{e^{-(\lambda+\mu)s}}{\lambda+\mu} \right]_{s=0}^{s=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.\end{aligned}$$

Comme

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 200, \quad \text{resp.} \ \ \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\mu} = 100,$$

on sait que

$$\lambda = \frac{1}{200}, \quad \mu = \frac{1}{100},$$

donc

$$\mathbb{P}\{X < Y\} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{200} + \frac{1}{100}} = \frac{1}{3}.$$

Conclusion La probabilité que la durée de vie de l'ampoule de 100 Watts soit plus grande que la durée de vie de l'ampoule de 60 Watts est égale à 33 %.