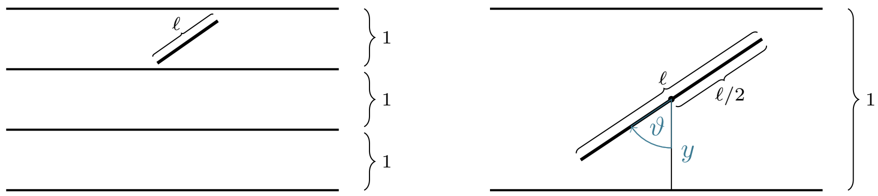
Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Probabilités et Statistique 2

Corrigé TD 4 2021

1. *Le problème de l'aiguille de Buffon* (1777)

Un plan est strié de droites parallèles espacées d'une distance 1.



On lance au hasard une aiguille de longueur $\ell < 1$. Avec quelle probabilité l'aiguille coupe-t-elle une des droites?

La position de l'aiguille est donnée par les coordonnées

$$Y = y,\ \Theta = \vartheta \quad (y \in [0,1[,\ \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2[\,).$$

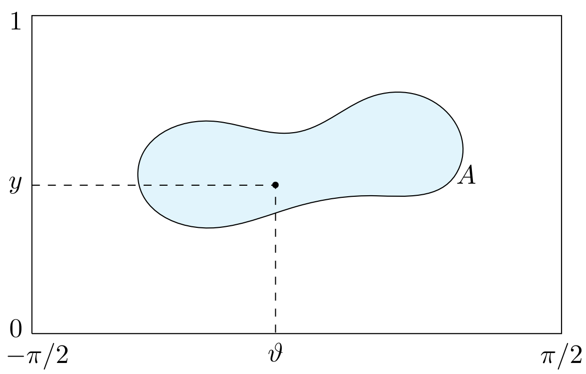
Hypothêse Y est une variable uniforme sur $[0,1[$;

Θ est une variable uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2[$;

Y et Θ sont indépendantes.

Pour toute partie mesurable A de $[-\pi/2, \pi/2[\times [0,1[$:

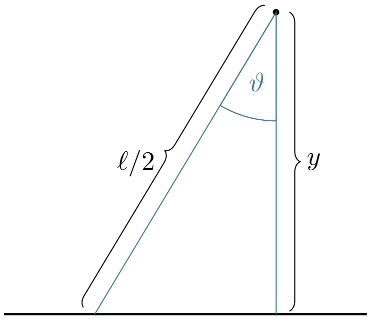
$$\mathbb{P}\{(\Theta, Y) \in A\} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbb{1}_A(\vartheta, y)\, d\vartheta dy = \frac{1}{\pi} \text{ l'aire de } A.$$



Une aiguille des coordonnées $Y = y$, $\Theta = \vartheta$ coupe

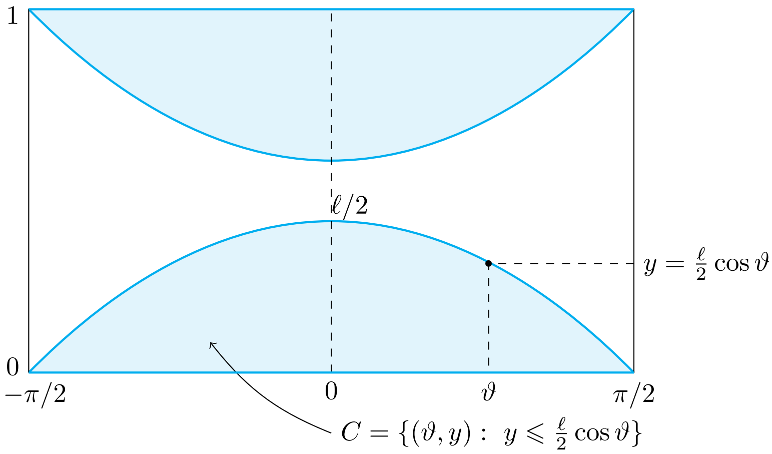
la droite en bas, si $y \leqslant \frac{\ell}{2} \cos \vartheta$, et

la droite en haut, si $1 - y \leqslant \frac{\ell}{2} \cos \vartheta$.



Donc, on obtient que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{l'aiguille coupe une des droites}\} &= 2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbb{1}_{\{y\leqslant \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\}}(\vartheta,y)\,d\vartheta dy\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\ell}{2}\cos\vartheta\,d\vartheta\\ &= \frac{\ell}{\pi}\,\sin\vartheta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\ell}{\pi}.\end{aligned}$$



2. Soit X le temps d'attente jusqu'à ce que la salle de bains soit libre. Alors X suit une loi exponentielle de paramètre α. Pour trouver α, on remarque que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha} = 20 \text{ min},$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{20}.$$

Alors

$$\mathbb{P}\{X \leqslant t\} = \int_0^t \alpha e^{-\alpha s} ds = -e^{-\alpha s}\Big|_0^t = 1 - e^{-\alpha t}$$

(a) Quelle est la probabilité que la salle de bains soit déjà libre après 10 minutes?

$$\mathbb{P}\{X \leqslant 10\} = 1 - e^{-10/20} = 1 - e^{-0.5} \approx 0.39$$

(b) Combien de temps faut-il attendre, afin d'être sûr que la salle de bains est réellement libre avec une certitude de 90 %?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \leqslant T\} = 1 - e^{-T/20} \geqslant 0.9 &\iff e^{-T/20} \leqslant 0.1 \\ &\iff -T/20 \leqslant \log 0.1 \\ &\iff T \geqslant -20 \log 0.1 \approx 46.05\end{aligned}$$

Par conséquent, on doit attendre environ 46 minutes (au moins !).

3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi. On note

$$F(t) := \mathbb{P}\{X_i \leqslant t\}$$

la fonction de répartition (indépendante de i). On pose

$$M_* := \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \quad \text{et} \quad M^* := \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i.$$

(a) On cherche les fonctions de répartition de M_* et M^*.
D'abord, en utilisant l'indépendance de $X_1, \ldots, X_n$, on remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{M_* > t\} &= \mathbb{P}\{X_1 > t, \ldots, X_n > t\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 > t\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_n > t\} \\ &= \big(1 - F(t)\big)^n,\end{aligned}$$

d'où

$$F_{M_*}(t) := \mathbb{P}\{M_* \leqslant t\} = 1 - \big(1 - F(t)\big)^n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}F_{M^*}(t) := \mathbb{P}\{M^* \leqslant t\} &= \mathbb{P}\{X_1 \leqslant t, \ldots, X_n \leqslant t\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \leqslant t\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_n \leqslant t\} = F(t)^n.\end{aligned}$$

(b) Supposons que

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds$$

avec la densité $f = f_{X_i}$ de X_i (indépendante de i). Alors on trouve pour la densité f_{M_*} de M_* que

$$\begin{aligned}f_{M_*}(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}\{M_* \leqslant t\} &= \frac{d}{dt}\big[1 - \big(1 - F(t)\big)^n\big] \\ &= n\,\big(1 - F(t)\big)^{n-1} f(t) \\ &= n\left(1 - \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds\right)^{n-1} f(t).\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}f_{M^*}(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}\{M^* \leqslant t\} &= \frac{d}{dt} F(t)^n \\ &= n\, F(t)^{n-1} f(t) \\ &= n\left(\int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds\right)^{n-1} f(t).\end{aligned}$$

(c) On trouve que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{M_* \leqslant x,\ M^* \leqslant y\} &= \mathbb{P}\{M^* \leqslant y\} - \mathbb{P}\{M_* > x,\ M^* \leqslant y\} \\ &= F(y)^n - \mathbb{P}\{M_* > x,\ M^* \leqslant y\}.\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{M_* > x,\ M^* \leqslant y\} &= \mathbb{P}\{X_i > x,\ X_i \leqslant y,\ \forall\, i = 1, \ldots, n\} \\ &= \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{x < X_i \leqslant y\}, & \text{si } x \leqslant y \\ 0, & \text{si } x > y \end{cases} \\ &= \begin{cases} \big(F(y) - F(x)\big)^n, & \text{si } x \leqslant y \\ 0, & \text{si } x > y, \end{cases}\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}\{M_* \leqslant x,\ M^* \leqslant y\} = \begin{cases} F(y)^n - \big(F(y) - F(x)\big)^n, & \text{si } x \leqslant y \\ F(y)^n, & \text{si } x > y. \end{cases}$$

4. Soit X une v.a. à valeurs réelles suivant la *loi de Cauchy* de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que l'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'existe pas.
On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X| &= \int_{\mathbb{R}} |x|\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &\geqslant \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\, dx = +\infty,\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{x}{1+x^2} \geqslant \begin{cases} 0 & \text{pour } x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{2x} & \text{pour } x > 1. \end{cases}$$

Par suite l'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'existe pas.

(b) Soit U une v.a. uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On pose $X = \tan U$. Alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) &= \mathbb{P}\{X \leqslant x\} = \mathbb{P}\{U \leqslant \arctan x\} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan x\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\, \arctan x;\end{aligned}$$

d'où, en dérivant,

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Donc $X = \tan U$ suit la loi de Cauchy.

(c) Si X suit une loi de Cauchy, il en est de même de $1/X$.
On pose $X^* = 1/\tan U$. Pour tout $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} F_{X^*}(x) = \mathbb{P}\left\{\frac{1}{\tan U} \leqslant x\right\} &= \mathbb{P}\left\{\tan U \geqslant \frac{1}{x}\right\} = \mathbb{P}\left\{U \geqslant \arctan\frac{1}{x}\right\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left\{U \leqslant \arctan\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\forall x \neq 0, \quad f_{X^*}(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{P}\left\{\frac{1}{\tan U} \leqslant x\right\} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On obtient que $1/\tan U$ suit la même loi que $\tan U$. Il en résulte que si X suit la loi de Cauchy, il en est de même de $1/X$.

5. Une variable aléatoire X à valeurs dans $]0,\infty[$ est dite *log-normale* de paramètres (μ, σ^2) (où μ réel, $\sigma > 0$) si

$$Y = \log X \quad \text{est } N(\mu, \sigma^2),$$

c.à.d. si

$$U := \frac{\log X - \mu}{\sigma} \quad \text{est } N(0,1).$$

(a) Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\{X \leqslant x\} = \mathbb{P}\{\log X \leqslant \log x\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{\log X - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{\log x - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{U \leqslant \frac{\log x - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\log x - \mu}{\sigma}} e^{-t^2/2}\,dt, \end{aligned}$$

c.à.d. la densité de X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x).$$

(b) Comme la variable $U = \frac{\log X - \mu}{\sigma}$ est $N(0,1)$, on a

$$X = e^{\sigma U + \mu} \quad \text{avec } U \sim N(0,1).$$

Donc on obtient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma u+\mu} f_U(u)\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma u+\mu} e^{-u^2/2}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} + \mu}\,du \\
&= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2}}\,du = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}},
\end{aligned}$$

car

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1.$$

De la même façon,

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\sigma u+\mu}\right)^2 f_U(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} e^{2\sigma u+2\mu} f_U(u)\,du = e^{2\mu+2\sigma^2},$$

et donc

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

(c) On a $\log X^r = r \log X$, où $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$, et donc

$$\log X^r \sim N(r\mu, r^2\sigma^2).$$

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $N(0,1)$. On a

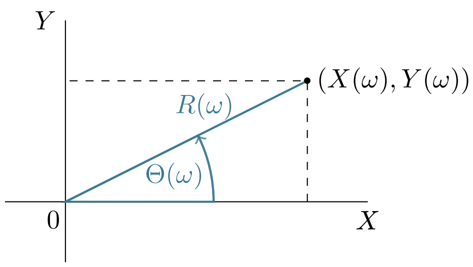
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2},$$

et parce que X et Y sont indépendantes, le couple (X, Y) a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

(a) On cherche la densité $f_{(R,\Theta)}$ du couple (R, Θ) où

$$R := \sqrt{X^2+Y^2}, \quad \tan\Theta = \frac{Y}{X}.$$



Rappel (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$) On écrit $x = r\cos\vartheta$ et $y = r\sin\vartheta$ avec $r > 0$ et $\vartheta \in [-\pi, \pi[$. Alors

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) = r^2 \\ \frac{y}{x} &= \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan\vartheta, \end{aligned}$$

et l'on a la formule

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathbb{R}_+\times[-\pi,\pi]} \varphi(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,rdrd\vartheta.$$

Pour toute fonction bornée continue ϕ sur $]0,\infty[\times[-\pi,\pi[$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\phi(R,\Theta)\big] &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \phi\left(r,\vartheta\right)\; f_{(R,\Theta)}(r,\vartheta)\,drd\vartheta \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\sqrt{x^2+y^2}, \theta(x,y)\right)\; f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \phi\left(r,\vartheta\right)\; f_{(X,Y)}(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,rdrd\vartheta \\ &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \phi\left(r,\vartheta\right)\; \frac{1}{2\pi}\,e^{-r^2/2}\,rdrd\vartheta \end{aligned}$$

On déduit que

$$f_{(R,\Theta)}(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\,e^{-r^2/2}\,r, \quad (r,\vartheta) \in\,]0,\infty[\times[-\pi,\pi[,$$

et d'où

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_{(R,\Theta)}(r,\vartheta)\,d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\,e^{-r^2/2}\,r\,d\vartheta \\ &\qquad\qquad\qquad = e^{-r^2/2}\,r, \quad r \in\,]-0,\infty[, \\ f_\Theta(\vartheta) &= \int_0^\infty f_{(R,\Theta)}(r,\vartheta)\,dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2/2}\,r\,dr \\ &\qquad\qquad\qquad = -e^{-r^2/2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}, \quad \vartheta \in [-\pi,\pi[. \end{aligned}$$

On remarque que

$$f_{(R,\Theta)}(r,\vartheta) = f_R(r)\cdot f_\Theta(\vartheta), \quad (r,\vartheta) \in\,]0,\infty[\times[-\pi,\pi[;$$

par conséquent, les variables R et Θ sont indépendantes.

Conclusion (loi commune de R et Θ)
Pour $A := [r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_+$ et $B := [\vartheta_1, \vartheta_2] \subset [-\pi,\pi[$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{R \in A,\ \Theta \in B\} &= \int_A f_R(r)\,dr \cdot \int_B f_\Theta(\vartheta)\,\vartheta \\ &= \int_{r_1}^{r_2} e^{-r^2/2}\,r\,dr \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1}{2\pi}\,d\vartheta \\ &= \left(e^{-r_2^2/2} - e^{-r_1^2/2}\right)\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2\pi}. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{R > t\} &= \int_t^\infty f_R(r)\,dr = \int_t^\infty e^{-r^2/2}\, r\,dr \\ &= -e^{-r^2/2}\Big|_t^\infty = e^{-t^2/2}, \quad t > 0,\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}\{R^2 > t\} = \mathbb{P}\{R > \sqrt{t}\} = e^{-t/2}, \quad t > 0.$$

D'où on obtient

$$\begin{aligned}f_{R^2}(t) &= \frac{d}{dt} F_{R^2}(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}\{R^2 \leqslant t\} \\ &= \frac{d}{dt}\big(1 - \mathbb{P}\{R^2 > t\}\big) = \frac{1}{2}\, e^{-t/2}, \quad t > 0,\end{aligned}$$

et donc

$$f_{R^2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-t/2}, & t \geqslant 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Par conséquent, R^2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$. D'autre part, en utilisant que Θ suit la loi uniforme sur $[-\pi, \pi[$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\tan\Theta \leqslant t;\ |\Theta| < \frac{\pi}{2}\right\} &= \mathbb{P}\left\{\Theta \leqslant \arctan t;\ |\Theta| < \frac{\pi}{2}\right\} \\ &= \frac{\arctan t + \frac{\pi}{2}}{2\pi}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\tan\Theta \leqslant t;\ \frac{\pi}{2} \leqslant |\Theta| < \pi\right\} &= \mathbb{P}\left\{\Theta \leqslant \arctan t;\ \frac{\pi}{2} \leqslant |\Theta| < \pi\right\} \\ &= \frac{\arctan t + \frac{\pi}{2}}{2\pi}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}\left\{\tan\Theta \leqslant t\right\} = \frac{\arctan t}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

On déduit que

$$f_{\tan\Theta}(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}\left\{\tan\Theta \leqslant t\right\} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, $\tan\Theta$ suit la loi de Cauchy.

Remarque X/Y et Y/X ont évidement même loi. Par conséquent, l'inverse d'une variable de Cauchy est encore une variable de Cauchy.

(c) 1. On obtient

$$\mathbb{E}[R] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{R > t\}\,dt = \int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. Évidemment, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{X^2}{R^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right] = \frac{1}{2},$$

car

$$\mathbb{E}\left[\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{Y^2}{X^2+Y^2}\right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{Y^2}{X^2+Y^2}\right] = 1.$$

3. D'autre part, supposons que l'esperance

$$\mathbb{E}\left[\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}\right]$$

existe. Rappelons que

$$\min(x,y) = \begin{cases} x, & x \leqslant y \\ y, & y \leqslant x \end{cases} \quad \text{and} \quad \max(x,y) = \begin{cases} x, & x \geqslant y \\ y, & y \geqslant x. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y\}} + \frac{Y}{X}\mathbb{1}_{\{Y\leqslant X\}}\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y\}}\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y \text{ et } Y>0\}}\right] + 2\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y \text{ et } Y<0\}}\right] \\
&\leqslant 2\,\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y \text{ et } Y>0\}}\right] \\
&= 2\,\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\left\{\frac{X}{Y}\leqslant 1 \text{ et } Y>0\right\}}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\left\{\frac{X}{Y}\leqslant 1\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\tan\Theta)\,\mathbb{1}_{\{\tan\Theta\leqslant 1\}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\pi}\,\frac{t}{1+t^2}\,dt = -\infty.
\end{aligned}$$

Pour $(*)$ on a utilisé que

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\left\{\frac{X}{Y}\leqslant 1 \text{ et } Y>0\right\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\left\{\frac{X}{Y}\leqslant 1 \text{ et } Y<0\right\}}\right],$$

car (X,Y) et $(-X,-Y)$ ont même loi.
D'autre part, en utilisant que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y \text{ et } Y<0\}}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{-X\leqslant -Y \text{ et } -Y<0\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{Y\leqslant X \text{ et } Y>0\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\left\{1\leqslant \frac{X}{Y} \text{ et } Y>0\right\}}\right],
\end{aligned}$$

on a de même façon,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}\right] &= 2\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y \text{ et } Y>0\}}\right] + 2\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y \text{ et } Y<0\}}\right] \\
&= 2\,\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\left\{\frac{X}{Y}\leqslant 1 \text{ et } Y>0\right\}}\right] + 2\,\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\left\{1\leqslant \frac{X}{Y} \text{ et } Y>0\right\}}\right] \\
&\geqslant 2 + \mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\mathbb{1}_{\left\{1\leqslant \frac{X}{Y}\right\}}\right] = +\infty.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\mathbb{E}\left[\left(\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}\right)_+\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}\right)_-\right] = +\infty
$$

et donc

$$
\mathbb{E}\left[\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}\right]
$$

n'existe pas.