Bachelor académique en Sciences et Ingénierie

Géométrie 4

Feuille de TD n° 5 2008

Géométrie hyperbolique

1. Soit $C := \alpha \cap S^2$ un grand cercle de S^2, où α est un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine. On note $\pi\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ la projection stéréographique et $\varphi := \sigma_\alpha$ la symétrie par rapport à α. Montrer que $\pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ est l'inversion du cercle généralisé $C' = \pi(C)$. Plus précisément on a :
   (a) Si $C = \alpha \cap S^2$ est un grand cercle passant par N, alors $\pi(C)$ est une droite augmentée par le point ∞, et $\pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ est la symétrie par rapport à cette droite.
   (b) Si $C = \alpha \cap S^2$ est un grand cercle ne passant pas par N, alors $\pi(C)$ est un cercle, et $\pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ est l'inversion par rapport à ce cercle.
2. La *distance chordale* sur $\hat{\mathbb{C}}$ est définie par la distance euclidienne sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:
$$d_{\text{chord}}(z_1, z_2) = d_{\text{eucl}}(\pi^{-1}(z_1), \pi^{-1}(z_2)), \quad z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}\,.$$
   (a) Montrer que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
$$d_{\text{chord}}(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}\,, \quad d_{\text{chord}}(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\,.$$
   (b) (*isométries de la sphère de Riemann*) Montrer qu'une transformation de Möbius $T \in \text{Möb}_+(\hat{\mathbb{C}})$ est une isométrie de $\hat{\mathbb{C}}$ pour la métrique chordale si et seulement si T est représentée par une matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2).$$
   Rappel $\mathrm{SU}(2)$ signifie les matrices complexes de déterminant 1 qui préservent le produit scalaire complexe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{C}^2$: $A^*A = \mathrm{id}$; c.à.d. $d = \bar{a}$, $c = -\bar{b}$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
   (c) En déduire que la projection stéréographique induit un isomorphisme des groupes $\mathrm{SO}(3)$ et $\mathrm{PSU}(2) := \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$.
3. Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ quatre points distincts. On définit alors le nombre complexe $(z_1, z_2; z_3, z_4) \in \mathbb{C}$, appelé *birapport*, de la manière suivante :
   Si les z_i sont tous différents de ∞, on pose
$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}\,.$$
   Si z_1, z_2, z_3 ou z_4 est ∞, on pose que $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ est égal à, respectivement,
$$\frac{(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_4)}\,, \quad \frac{(z_1 - z_4)}{(z_3 - z_4)}\,, \quad \frac{(z_1 - z_4)}{(z_1 - z_2)}\,, \quad \frac{(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)}\,.$$
   (a) Montrer que les éléments de $\text{Möb}_+(\hat{\mathbb{C}})$ préservent le birapport : pour tout $m \in \text{Möb}_+(\hat{\mathbb{C}})$ on a $(m(z_1), m(z_2); m(z_3), m(z_4)) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$ pour tout $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts.
   (b) Montrer que le birapport est un nombre réel si et seulement si les quatre points sont sur un même cercle généralisé.

4. Montrer que le cercle hyperbolique $\{z \in \mathbb{D} : d_{\mathbb{D}}(z, c_0) = r_0\}$ dans le disque $\mathbb{D}$ est aussi un cercle euclidien, mais qu'en général, centre euclidien et rayon euclidien sont différents du centre hyperbolique c_0 et rayon r_0.
5. (a) Montrer que, dans le modèle hyperbolique du demi-plan supérieur $\mathbb{H}^2$, la fonction d'aire

$$\text{aire}\,(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}\,, \quad \mathcal{R} \subset \mathbb{H}^2 \text{ domaine mesurable,}$$

est invariante sous l'action de $\text{Möb}_+(\mathbb{H}^2)$.

   (b) Pour le modèle hyperbolique du disque $\mathbb{D}$, montrer la formule

$$\text{aire}\,(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{2}{1 - |z|^2}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad \mathcal{R} \subset \mathbb{D} \text{ mesurable.}$$

6. Pour un triangle hyperbolique $\Delta = \Delta(a, b, c)$ avec des sommets a, b, c et d'angles α, β, γ, déduire la deuxième loi du cosinus hyperbolique :

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\,\cosh C$$

(où C est la longueur du côté ab).