

Abel-Preis an den Mathematiker Srinivasa S.R. Varadhan

Bild von Möglichem und Unmöglichem

VON RAYMOND MORTINI UND
ANTON THALMAIER *

In den sechziger und siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts stieg die französische Erdölgesellschaft Total in den Bau von Ölförderanlagen in der Nordsee ein. Die Errichtung von Förderplattformen warf technische Probleme auf. Wie solche Plattformen dimensionieren, um auch extremen Wellengängen standzuhalten? Innerhalb eines akzeptablen Restrisikos sollen sie ja gerade auch jenen extremen Wellen standhalten, wie sie vielleicht nur alle Jahrhunderte einmal beobachtet werden, ohne dass die Konstruktion aufgrund der angestrebten Sicherheitsmargen absurde Dimensionen annehmen würde.



Srinivasa S.R. Varadhan

Das Erdöl ermöglichte es dem norwegischen Staat, im Jahre 2002 den sogenannten Abel-Preis ins Leben zu rufen: ein Preis, der seit her jährlich für herausragende Leistungen auf dem Gebiet der Mathematik vergeben wird und als Nobelpreis der Mathematik gilt. Die Norwegische Akademie der Wissenschaften hat den mit umgerechnet 755 000 Euro dotierten Abel-Preis 2007 an den New Yorker Mathematiker Srinivasa S.R. Varadhan verliehen. Es mag als kurioser Zufall erscheinen, dass Varadhan unter anderem für die Entwicklung einer mathematischen Theorie extremer Ereignisse ausgezeichnet wird – genau wonach seinerzeit der Ölkonzern Total gesucht hat.

Srinivasa Varadhan wurde 1940 in Madras, Indien geboren. Er ist gegenwärtig Professor der Mathematik am renommierten Courant Institute der New York University. 1963 promovierte er am Indian Statistical Institute in Calcutta; sein Doktorvater war der indische Statistiker C.R. Rao. Srinivasa Varadhan begann seine akademische Laufbahn am Courant Institute in New York, wo er aufgrund besonderer Empfehlung ein Stipendium erhalten hatte. Bereits nach zwei Jahren schlug ihn Direktor Louis Nirenberg für eine feste Stelle am Courant Institute vor.

Varadhan fand am Courant Institute die für ihn ideale intellektuelle Umgebung, und er blieb dem Institut sein Leben lang treu, zuerst als Assistent Professor, dann als Associate Professor, und schließlich ab 1972 als Full Professor. Danach wurde Srinivasa Varadhan zum Direktor des Courant Instituts ernannt (1980-84).

Die Norwegische Akademie der Wissenschaften ehrt Varadhan „für seine grundlegenden Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie und vor allem für die Entwicklung einer allgemeinen Theorie der großen Abweichungen“. Die-Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekanntlich das mathematische Werkzeug für die Untersuchung von Situationen, in denen der Zufall eine Rolle spielt. Viele Fragestellungen lassen sich dabei mit dem Gesetz der großen Zahlen beantworten, welches im 18. Jahrhundert von Jacob Bernoulli entdeckt wurde und besagt, dass das durchschnittliche Ergebnis einer langen Reihe unabhängiger Beob-

achtungen gewöhnlich dem Mittelwert sehr nahe kommt.

Nehmen wir eine Münze, die wiederholt geworfen wird, und nehmen wir an, ein Spieler erhält bei „Kopf“ jeweils einen Euro, während er bei „Zahl“ einen Euro an die Spielbank verliert. Ist die Anzahl der Münzwürfe hinreichend groß, so kann man davon ausgehen, dass sich „Kopf“ und „Zahl“ in etwa die Waage halten: Bei 1000 Würfeln wird man im Mittel also etwa 500 mal das Ergebnis Kopf erwarten, dies ist das erwähnte Gesetz der großen Zahlen; darüber hinaus wird die Fluktuation um diesen Mittelwert ziemlich präzise durch eine Gaußsche Glockenkurve beschrieben, dies gemäß dem sogenannten zentralen Grenzwertsatz. Gaußsche Glockenkurven sind durch zwei Parameter festgelegt, dem Mittelwert und die Varianz, sie bilden die Grundlage der parametrischen Statistik.

Nehmen wir an, unser Spieler will mit dem beschriebenen Münzwurfspiel eine bestimmte Summe gewinnen, dann wird er solange spielen, bis er entweder sein Ziel erreicht hat, oder bis sein zur Verfügung stehendes Kapital verspielt ist. Es ist zweifelsohne nützlich, zu wissen, wie groß das Risiko hierfür ist. Mit genau solchen Fragestellungen beschäftigt sich die Theorie der großen Abweichungen (large deviations), nämlich mit dem, was typisch ist und dem, was davon abweicht. Bei einer langen Reihe von Münzwürfen besteht ein typisches Protokoll wie gesagt aus einer Folge von „Kopf“ und „Zahl“, mit einem relativen Anteil von jeweils etwa 50 Prozent. Abweichungen davon sind möglich und kommen natürlich vor; große Abweichungen sind selten, aber auch sie kommen vor. Bereits aus Erfahrung weiß man, dass Glücks- und Pechstrahlen lange dauern können.

Es ist leicht einzusehen, warum solche Fragen etwa auch einen Versicherungsmathematiker interessieren werden. Sein Unternehmen wird die Höhe der Prämien auf der Basis von Statistiken der vergangenen Jahre berechnen. Selbst der Extremfall, dass alle versicherten Autos im gleichen Jahr zu Schrott gefahren werden, ist theoretisch möglich. In der Praxis wird es vielmehr darauf ankommen, die Kapitalreserven eines

Versicherungsunternehmens so anzusetzen, dass die Wahrscheinlichkeit einer Zahlungsunfähigkeit unter einem akzeptablen Niveau bleibt. Bei der Untersuchung versicherungsmathematischer „Ruinprobleme“ entdeckte bereits Harald Cramér 1937, dass die üblichen Approximationen auf der Grundlage des zentralen Grenzwertsatzes (illustriert durch die Gaußsche Glockenkurve) in die falsche Richtung führen. Er entwickelte die ersten präzisen Abschätzungen großer Abweichungen.

Es sollten dann noch über 30 Jahre vergehen, bis Varadhan die zugrunde liegenden allgemeinen Prinzipien entdeckte und deren enorme Reichweite deutlich machte, weit über den klassischen Rahmen von unabhängigen Versuchsreihen hinaus.

In seiner 1966 veröffentlichten zentralen Arbeit „Asymptotic probabilities and differential equations“ und seiner überraschenden Lösung des Polaron-Problems der Euklidischen Quantenfeldtheorie (1969) begann Varadhan, eine allgemeine Theorie der großen Abweichungen zu entwickeln, die über eine rein quantitative Verbesserung von Konvergenzraten weit hinausgeht. Es geht vielmehr um die fundamentale Frage, wie sich ein stochastisches System qualitativ verhält, wenn es von dem durch ein Gesetz der großen Zahlen vorhergesagten ergodischen Verhalten abweicht, oder wenn es als kleine zufällige Störung eines deterministischen Systems auftritt. Der Schlüssel ist ein weit reichendes Variationsprinzip, mit dem das unerwartete Verhalten anhand eines neuen Wahrscheinlichkeitsmodells beschrieben wird, welches einen passenden Entropieabstand zum ursprünglichen Modell minimiert.

In dem offiziellen Text des Abel-Komitees heißt es: „Varadhans Theorie der großen Abweichungen liefert eine umfassende und äußerst effiziente Methode für die Klärung einer Vielfalt von Phänomenen in komplexen stochastischen Systemen, und zwar in so verschiedenen Bereichen wie Quantenfeldtheorie, statistische Physik, Populationsgenetik, Ökonometrie, Finanzmathematik und Verkehrssteuerung in großen Netzwerken. Zugleich erschließt sie neue Möglichkeiten für den Einsatz von Computern zur Simulation und Analyse des Auftretens von seltenen Ereignissen. In den letzten vier Jahrzehnten wurde die Theorie der großen Abweichungen zu einem Eckpfeiler der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen.“

Das Problem, welches sich dem Ölkonzern Total stellte, wurde von dem französischen Statistiker, und späteren Mitglied der Académie des Sciences, Paul Deheuvels, mit den Methoden der damaligen Zeit, der parametrischen Statistik, gelöst. Varadhans Theorie setzt viel tiefer an; sein gesamtes Lebenswerk kann dem parametrischen Ansatz geradezu als Antithese gegenübergestellt werden: er sucht die Lösung auf dem Niveau eines grundlegenden Funktionalkalküls.

Bereits in den 1930er Jahren publizierte der Bostoner Mathematiker Norbert Wiener einen langen Artikel mit dem Titel „Universelles Chaos“, in dem er einen Wahrscheinlichkeitsraum konstruierte, der unendlich viele Gaußkurven, zusammen mit den assoziierten Hermite-Polynomen, enthalten sollte. Der nahezu prophetische Titel blieb jedoch mysteriös: warum universell? Wiener blieb hierfür jegliche mathematische Rechtfertigung schuldig. Es war der japanische Mathematiker Kiyosi Itô, der 20 Jahre später auf eben diesem Wieneraum einen fundamentalen stochastischen Kalkül entwickelte und zeigte, dass sich hierauf alle Diffusionsprozesse realisieren lassen.

Diffusionsprozesse setzen sich aus einer systematischen Komponente (Drift) und einem fluktuativen Anteil (Rauschen) zusammen und können gemäß Itô als Lösungen stochastischer Differentialgleichungen konstruiert werden. Varadhan entwickelte zusammen mit Dan Stroock einen neuen und außerordentlich effizienten Zugang: Anstatt nach Lösungen komplizierter stochastischer Differentialgleichungen zu suchen, genügt es nach den Wahrscheinlichkeitsmaßen zu suchen, welche die Lösungen zu Martingalen machen. Die Grundzüge dieser neuer Theorie fanden ihre definitive Darstellung in einer über 300 Seiten starken Monographie, die 1979 bei Springer in den Grundvorlesungen der Mathematik erschienen.

Martingale sind einer der Grundbegriffe der modernen Stochastik: Sie bilden die mathematische Präzisierung von driftfrei fluktuierenden stochastischen Prozessen. In der Spieltheorie werden Martingale faire Spiele genannt. So ist beispielsweise obiges Münzwurfspiel, bei dem der Spieler mit jedem Wurf mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Euro gewinnt oder verliert, dahingehend fair, dass weder Spieler noch Spielbank bevorzugt ist.

Die Idee nach Wahrscheinlichkeitsmaßen zu suchen, welche die Kursverläufe von Aktien, Optionen, Anleihen, Devisen etc zu Martingalen machen, hat die Finanzmathematik während der letzten Jahrzehnte revolutioniert. Die Existenz solcher Wahrscheinlichkeitsbewertungen charakterisiert die Eigenschaft von Finanzmärkten, Arbitrage-Möglichkeiten auszuschließen, also die Möglichkeit, Profit zu machen ohne gleichzeitig Risiko einzugehen. Es ist erstaunlich, dass dieses simple Prinzip „the expectation of the speculator is zero“ (oder wie der Volksmund sagt: „Von nichts kommt nichts“) im wesentlichen bereits ausreicht, Preise von Optionen und Finanzderivaten eindeutig festzulegen, und dem Verkäufer dieser Titel Möglichkeiten zur Hand gibt, Portfoliostrategien zu berechnen, mit denen er sein Risiko vollständig kontrollieren kann („perfect hedging“). Ein einfacher Spezialfall dieses Prinzips ist die berühmte Black-Scholes-Formel zur Bewertung von europäischen Optionen.

Moderne Mathematik hat die Finanzlandschaft nicht nur vollständig verändert; sie zeichnet auch ein klares Bild davon, was möglich und was nicht möglich ist, sowohl im Spielkasino wie an der Börse.

Varadhans Ideen haben einen enormen Einfluss ausgeübt, seine Arbeiten verbinden erstklassige Mathematik mit weitreichenden praktischen Konsequenzen. Es wäre aber sehr verkürzt anzunehmen, es ginge ihm um konkrete Anwendungen. Von Mathematikern wird heute gerne verlangt, sie sollten sich mehr um angewandte und praktisch relevante Probleme kümmern. Nehmen wir einmal an, Varadhan hätte seinerzeit nicht am Courant Institute Karriere gemacht, sondern er wäre wie heute üblich auf einen Lehrstuhl für Versicherungsmathematik oder Risikoforschung berufen worden. Seine bahnbrechenden Arbeiten über den Quantentunneleffekt wären sicher nicht geschrieben worden, er hätte die Reichweite seiner Martingalmethode nicht am Beispiel der Konstruktion unendlich-dimensionaler Diffusionen in der Populationsgenetik demonstrieren können, er hätte vermutlich auch nicht über hydrodynamische Grenzwerte gearbeitet, die das makroskopische Verhalten von sehr großen Systemen interagierender Teilchen beschreiben. Möglicherweise hätte er aber auch den Grundbegriff der Theorie der großen Abweichungen, die Varadhansche „rate function“, die einem mathematischen Maß des Entropiewachstums der Thermodynamik entspricht, nie entdeckt, und Versicherungsmathematiker hätten selber herausfinden müssen, wie man das Risiko extremer Ereignisse effizient abschätzt. Varadhan geht es weniger um Anwendungen als um die grundlegenden Prinzipien, die intellektuellen Herausforderungen und die Hindernisse. Seine Arbeiten sind eine Gratwanderung zwischen dem Machbaren und dem Unmöglichen, sie zeichnen sich aus durch konzeptuelle Stärke und zeitlose Schönheit.

Man kann von Varadhan viel über subtile Gesetzmäßigkeiten extremer Ereignisse lernen; naturgemäß wird es immer unvorhersehbare Katastrophen geben. Auch der 11. September 2001 begann für Varadhan als ein Tag wie jeder andere; er weilte zu Vorträgen am Institute Henri Poincaré in Paris. Gopalakrishnan „Gopal“ Varadhan, der älteste Sohn von Raghu und Vasu Varadhan, beides Professoren an der New York University, ging wie gewohnt in seinem Büro auf der 105. Etage des Nordturms des World Trade Centers der Arbeit nach. Gopal Varadhan nutzte die letzten Minuten seines Lebens um seinen Vater in Paris auf dem Handy anzurufen; er wird auf der offiziellen Liste der Opfer des 11. Septembers als „confirmed dead“ geführt.

* Raymond Mortini ist Professor für Mathematik an der Universität Paul Verlaine in Metz
Anton Thalmaier ist Professor für Stochastik an der Universität Luxemburg.