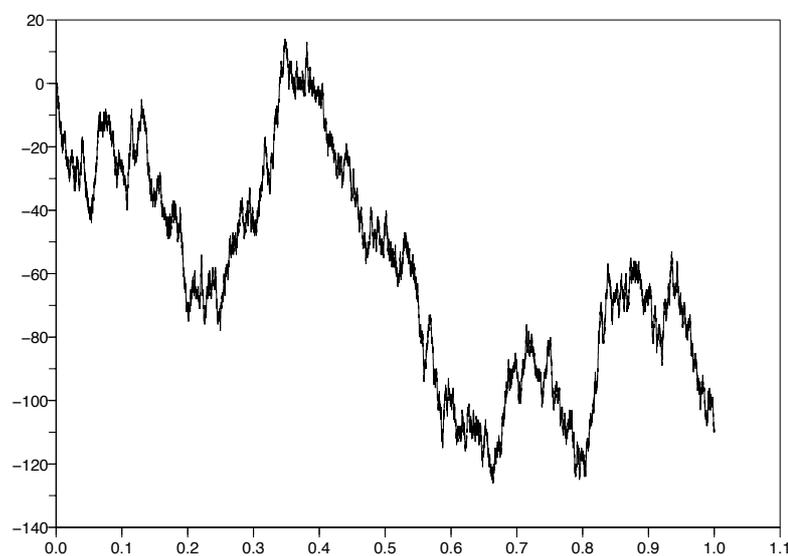


# Cours de calcul stochastique

## Master M2 IRFA

Christophe Chorro

Septembre 2006



Les éventuelles fautes d'orthographe, coquilles ou erreurs sont de mon entière responsabilité, merci de me les signaler. Vous pouvez me contacter à l'adresse "christophe.chorro@gmail.com" pour toute remarque sur le contenu et l'organisation de ce cours.



# Table des matières

0.1	Généralités . . . . .	7
0.1.1	Définition . . . . .	7
0.2	Notion d'indépendance . . . . .	8
0.2.1	Evénements . . . . .	8
0.2.2	Tribu . . . . .	9
0.2.3	Variables aléatoires . . . . .	9
0.2.4	Convergence des variables aléatoires . . . . .	10
0.3	Vecteurs gaussiens . . . . .	13
0.4	Notion d'espérance conditionnelle . . . . .	15
0.4.1	Conditionnement par rapport à un événement . . . . .	15
0.4.2	Conditionnement par rapport à une variable aléatoire discrète . . . . .	15
0.4.3	Conditionnement par rapport à une tribu . . . . .	15
0.4.4	Conditionnement par rapport à une variable aléatoire . . . . .	16
0.4.5	Loi conditionnelle . . . . .	16
0.4.6	Propriétés de l'espérance conditionnelle . . . . .	17
0.4.7	Espérance conditionnelle et vecteurs gaussiens . . . . .	19
0.5	Processus stochastiques . . . . .	19
0.5.1	Généralités . . . . .	19
0.5.2	Filtrations, processus adaptés . . . . .	21
0.5.3	Processus gaussiens . . . . .	24
0.5.4	Martingales en temps continu . . . . .	24
0.6	Théorème de Radon Nikodym . . . . .	27
	Bibliographie . . . . .	29
<b>1</b>	<b>Le mouvement Brownien</b>	<b>31</b>
1.1	Un peu d'histoire . . . . .	31
1.2	Définition, existence, simulation . . . . .	33
1.2.1	Définition . . . . .	33
1.2.2	Existence, construction, simulation . . . . .	35
1.3	Propriétés . . . . .	38
1.3.1	Propriétés de martingale . . . . .	39
1.3.2	Transformations . . . . .	39
1.3.3	Propriétés trajectorielles . . . . .	40

1.3.4	Variation et variation quadratique . . . . .	41
1.3.5	Caractère Markovien . . . . .	43
1.3.6	Le mouvement brownien géométrique . . . . .	43
1.3.7	Intégrale de Wiener . . . . .	44
1.3.8	Formule d'Itô pour le M.B . . . . .	49
1.3.9	Applications de l'intégrale de Wiener . . . . .	51
<b>2</b>	<b>L'intégrale stochastique, les processus d'Itô.</b>	<b>59</b>
2.1	Intégrale stochastique sur $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$ . . . . .	59
2.1.1	Définition . . . . .	59
2.1.2	Propriétés . . . . .	60
2.2	Extension à $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ . . . . .	62
2.3	Processus d'Itô . . . . .	64
2.4	Calcul d'Itô étendu . . . . .	65
2.5	Equations différentielles stochastiques (EDS) . . . . .	67
2.5.1	Le cas du Brownien géométrique . . . . .	67
2.5.2	Le cas général . . . . .	69
2.5.3	Propriété de Markov des solutions . . . . .	71
2.5.4	Comment simuler une EDS (un premier pas) . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Deux résultats importants</b>	<b>77</b>
3.1	Théorème de Girsanov . . . . .	77
3.2	Théorème de représentation des martingales Browniennes . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Applications à la finance (cadre général)</b>	<b>85</b>
4.1	Petite introduction . . . . .	85
4.1.1	Un peu d'histoire . . . . .	85
4.1.2	De l'intégrale stochastique? . . . . .	86
4.1.3	Le calcul stochastique : une nouvelle main invisible? . . . . .	87
4.2	Modélisation d'un marché financier en temps continu . . . . .	88
4.2.1	Les actifs présents sur le marché . . . . .	88
4.2.2	Stratégies financières . . . . .	88
4.2.3	Autofinancement . . . . .	89
4.2.4	Arbitrages . . . . .	90
4.2.5	Mesures martingales équivalentes (MME) . . . . .	91
4.2.6	Les actifs contingents . . . . .	91
4.3	Plan d'attaque et objectifs . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Modèle de Black et Scholes</b>	<b>97</b>
5.1	Le modèle . . . . .	97
5.1.1	Dynamique de l'actif risqué . . . . .	97
5.1.2	Existence d'une MME . . . . .	98

5.2	Les stratégies financières $P^*$ admissibles . . . . .	99
5.2.1	Définition . . . . .	99
5.2.2	$P^*$ -complétude du marché . . . . .	99
5.2.3	A.O.A parmi les stratégies $P^*$ admissibles . . . . .	101
5.3	Unicité de la probabilité risque neutre . . . . .	101
5.4	Proposer un prix, se couvrir . . . . .	101
5.5	Evaluation et couverture dans le cas où $h = f(S_T)$ . . . . .	102
5.6	Formule de Black et Scholes . . . . .	104
5.7	Les Grecques . . . . .	106
5.7.1	Définition . . . . .	106
5.7.2	Cas où le payoff est de la forme $h = f(S_T)$ . . . . .	107
5.7.3	Intérêt pratique du $\Delta$ et du $\Gamma$ . . . . .	109
5.8	Black et Scholes en pratique . . . . .	109
5.8.1	Spécification de $\sigma$ . . . . .	109
5.8.2	Prix et couverture . . . . .	111
5.8.3	Calcul du prix, du $\Delta$ et du $\Gamma$ . . . . .	111
5.9	Splendeurs et misères du modèle de Black et Scholes . . . . .	114
5.9.1	Avantages . . . . .	115
5.9.2	Limites . . . . .	116



# Rappels de probabilités

Ce chapitre ne constitue pas un cours élémentaire de probabilité mais cherche à regrouper modestement certaines notions essentielles qui nous seront indispensables pour la suite. Nous renvoyons, par exemple, le lecteur à [1] et [2] pour un exposé bien plus complet.

$\forall d \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  la tribu borélienne sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $\langle, \rangle$  le produit scalaire naturel sur  $\mathbb{R}^d$  et  $dx$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ .

## 0.1 Généralités

### 0.1.1 Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité.

**Définition 0.1.1** Une variable aléatoire est une application  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifiant  $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), X^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ .

**Remarque 0.1.1** a) Il existe une tribu naturelle sur  $\Omega$  rendant  $X$  mesurable. Cette tribu est notée  $\sigma(X) = \{X^{-1}(E); E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  et est minimale au sens de l'inclusion. On peut montrer (exercice) que toute variable aléatoire  $\sigma(X)$  mesurable est de la forme  $h(X)$  où  $h$  est borélienne.

b) La notion de mesurabilité est stable par les opérations élémentaires et par passage à la limite. Lorsque  $\Omega$  est un espace topologique équipé de sa tribu borélienne, la continuité implique la mesurabilité.

**Définition 0.1.2** Pour  $A \subset \Omega$ , on note  $1_A$  la fonction vérifiant  $1_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et  $1_A(x) = 0$  si  $x \in A^c$ . Si  $A \in \mathcal{A}$ ,  $1_A$  est mesurable et dans ce cas  $\sigma(A) = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$ .

Une variable aléatoire peut transporter la structure probabiliste :

**Proposition 0.1.1** Si  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une variable aléatoire, l'application  $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie,  $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , par  $P_X(E) = P(X^{-1}(E))$  est une probabilité sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  appelée la loi de  $X$ .

**Définition 0.1.3** On dit qu'une variable aléatoire possède un moment d'ordre  $p \in \mathbb{N}^*$  ssi la quantité

$$E[|X|^p] = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p dP_X(x)$$

est finie. Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $L^p = \{X; E[|X|^p] < \infty\}$  et si  $X \in L^p$ ,  $\|X\|_p = E[|X|^p]^{\frac{1}{p}}$ . Notons que  $(L^p, \|X\|_p)$  est complet (car toute série absolument convergente est convergente).

**Exemple 0.1.1** Lorsque  $d = 1$ , on dit qu'une variable aléatoire suit une loi normale de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  (notée  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ) si  $P_X$  est absolument continue par rapport à  $dx$  et si

$$dP_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Dans ce cas,  $X$  possède des moments de tout ordre, en particulier,  $E[X] = m$  et  $\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \sigma^2$ .

**Exercice 0.1.1** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$E[X^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}.$$

On a le théorème de caractérisation suivant :

**Théorème 0.1.1** a) La fonction caractéristique  $\Phi_X : t \in \mathbb{R}^d \rightarrow E[e^{i\langle t, X \rangle}] \in \mathbb{C}$  caractérise la loi de  $X$ .

b) Si  $d = 1$ , la loi de  $X$  est caractérisée par la fonction de répartition  $F_X : t \in \mathbb{R} \rightarrow P(X \leq t) \in \mathbb{R}_+$ .

**Exemple 0.1.2** Si  $X$  suit une  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , alors

$$\Phi_X(t) = e^{itm} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

## 0.2 Notion d'indépendance

### 0.2.1 Evénements

**Définition 0.2.1** Deux événements  $A$  et  $B$  (dans  $\mathcal{A}$ ) sont dits indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . On note alors  $A \perp B$  (cette notation générique sera utilisée également pour les tribus et les variables aléatoires).

**Définition 0.2.2** Des événements  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendants si  $P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ ,  $\forall I \subset \{1, \dots, n\}$ .

**Remarque 0.2.1** Attention, des événements 2 à 2 indépendants ne sont pas forcément indépendants. En effet si on jette deux pièces équilibrées on peut montrer que le événements

$A =$  "la première pièce tombe sur pile"

$B =$  "la deuxième pièce tombe sur face"

$C =$  "les deux pièces tombent du même côté"

sont indépendants 2 à 2 mais non indépendants.

## 0.2.2 Tribu

**Définition 0.2.3** Des sous tribus  $(\mathcal{A}_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathcal{A}$ , sont indépendantes si  $P(\cap_{1 \leq i \leq n} A_i) = \prod_{1 \leq i \leq n} P(A_i)$ ,  $\forall A_i \in \mathcal{A}_i$ .

## 0.2.3 Variables aléatoires

**Définition 0.2.4** Les variables aléatoires  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendantes si les tribus associées  $(\sigma(X_i))_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendantes.

On a alors le théorème de caractérisation suivant, énoncé pour simplifier les choses dans le cas  $d = 1$ .

**Théorème 0.2.1** Les propositions suivantes sont équivalentes :

a)  $X_1 \perp X_2$

b)  $P_{(X_1, X_2)} = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$

c)  $\forall f, g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), E[f(X_1)g(X_2)] = E[f(X_1)]E[g(X_2)]$

d)  $\Phi_{(X_1, X_2)} = \Phi_{X_1} \Phi_{X_2}$

**Proposition 0.2.1** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors  $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$  et  $E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$ . La dernière relation signifie que deux variables indépendantes sont décorréllées, la réciproque est cependant fausse en général (prendre  $X_1 = X, X_2 = X^2$  avec  $X$  symétrique). Le lecteur pourra se reporter au paragraphe sur les vecteurs gaussiens pour plus de détails.

**Proposition 0.2.2** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires dont la loi conjointe possède une densité, alors,  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes ssi la densité de la loi conjointe est égale au produit des densités marginales.

**Exercice 0.2.1** (Méthode de Box-Muller) On considère deux variables aléatoires  $U_1$  et  $U_2$  indépendantes suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Montrer que les variables

$$G_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2) \text{ et } G_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

sont deux  $\mathcal{N}(0, 1)$  indépendantes.

**Correction de l'exercice :** Soit

$$\Phi : (x, y) \in ]0, 1[^2 \rightarrow (u = \sqrt{-2\log(x)}\cos(2\pi y), v = \sqrt{-2\log(x)}\sin(2\pi y)) \in \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_+ \times \{0\}).$$

On montre que  $\Phi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme et son déterminant jacobien vérifie  $|J(\Phi)(x, y)| = \frac{2\pi}{x}$ . Or  $u^2 + v^2 = -2\log(x)$  ainsi  $|J(\Phi^{-1})(u, v)| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$ . D'après la formule de changement de variables, pour  $F \in C_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ,

$$\int_{]0,1[^2} F(\Phi(x, y)) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_+ \times \{0\})} F(u, v) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} du dv. \square$$

**Simulation**

## 0.2.4 Convergence des variables aléatoires

**Modes et critères de convergence**

Pour simplifier les choses on se place dans le cas  $d = 1$ .

**Lemme 0.2.1 (Borel-Cantelli)** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ .

a) Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < \infty$ , alors

$$P(\{\omega \in \Omega; \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}) = 0.$$

b) Si les  $A_n$  sont indépendants avec  $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$ , alors,

$$P(\{\omega \in \Omega; \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}) = 1.$$

**Définition 0.2.5** On dit qu'une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires converge presque sûrement vers  $X$  ( $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X$ ) si

$$P(\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega)\}) = 1$$

**Proposition 0.2.3** En utilisant B.C, on montre que  $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X$  si  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty.$$

**Lemme 0.2.2** *Inégalités classiques :*

a) (Tchebychev) Si  $X \in L^p$ ,  $\lambda > 0$ ,

$$P(|X| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E[|X|^p].$$

b) (Holder) Si  $X \in L^p$ ,  $Y \in L^q$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors (par concavité du log  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \dots$ ),

$$E[|XY|] \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Conséquence, les espaces  $L^p$  sont emboîtés.

c) (Minkowsky) Si  $X \in L^p$ ,  $Y \in L^p$  (par convexité de  $x^p + ruse \dots$ )

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

**Définition 0.2.6** On dit qu'une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires dans  $L^p$  converge vers  $X$  dans  $L^p$  ( $X_n \xrightarrow[L^p]{} X$ ) si

$$\|X_n - X\|_p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Définition 0.2.7** On dit qu'une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires converge vers  $X$  en probabilité ( $X_n \xrightarrow[p]{} X$ ) si  $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - X_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Définition 0.2.8** On dit qu'une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires converge vers  $X$  en loi ( $X_n \xrightarrow[\mathcal{L}]{} X$ ) si  $\forall f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$E[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E[f(X)].$$

**Proposition 0.2.4** Les propositions suivantes sont équivalentes.

- $X_n \xrightarrow[\mathcal{L}]{} X$
- $F_{X_n}$  converge simplement vers  $F_X$  en tout point où  $F_X$  est continue ( $d = 1$ )
- $\Phi_{X_n}$  converge simplement vers  $\Phi_X$

**Exercice 0.2.2** Soit  $(G_n)$  une suite de variables aléatoires gaussiennes qui converge vers  $G$  dans  $L^2$ . Montrer que  $G$  est gaussienne.

### Comparaison des modes de convergence

**Proposition 0.2.5** a)  $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[p]{} X$

b)  $X_n \xrightarrow[L^1]{} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[p]{} X$

c)  $X_n \xrightarrow[p]{} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[\mathcal{L}]{} X$

d) Si  $q \geq p$ ,  $X_n \xrightarrow[L^q]{} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[L^p]{} X$

**Preuve** a) Se déduit de la proposition 0.2.3.

b) Se déduit de l'inégalité de Tchebychev.

c) Soit  $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$ ,

$$|E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq E[|f(X_n) - f(X)|1_{|X_n - X| > \varepsilon}] + E[|f(X_n) - f(X)|1_{|X_n - X| \leq \varepsilon}].$$

Or  $E[|f(X_n) - f(X)|1_{|X_n - X| > \varepsilon}] \leq cste P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Soit  $g \in C_K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ ,

$$E[|f(X_n) - f(X)|1_{|X_n - X| \leq \varepsilon}] \leq 2\varepsilon + E[|g(X_n) - g(X)|1_{|X_n - X| \leq \varepsilon}].$$

La fonction  $g$  étant uniformément continue,  $\exists \eta > 0$  tel que

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon,$$

ainsi,

$$E[|g(X_n) - g(X)|1_{|X_n - X| \leq \varepsilon}] \leq \varepsilon + cste P(|X_n - X| \geq \eta)$$

avec  $P(|X_n - X| \geq \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

d) Se déduit de l'inégalité de Holder.  $\square$

**Remarque 0.2.2** a) Toutes les autres implications sont fausses en général.

b) Seule la convergence p.s autorise l'habituelle stabilité algébrique des convergences. Ainsi, le seul moyen de ne pas se tromper est de revenir aux définitions. (contre-exemple  $X_n = -X$  où  $X$  est symétrique  $X_n$  converge en loi vers  $X$  et  $X_n - X$  converge en loi vers  $-2X$ ).

Les résultats suivants sont des réciproques partielles de la proposition 0.2.5.

**Définition 0.2.9** Une famille  $\{X_i; i \in I\}$  de variables aléatoires dans  $L^1$  est dite uniformément intégrable (U.I) si

$$\sup_{i \in I} E[|X_i|1_{|X_i| > n}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Exemple 0.2.1** a) Si  $I$  est fini alors  $\{X_i; i \in I\}$  est U.I.

b) Si  $\exists Y \in L^1$  telle que  $\forall i \in I |X_i| \leq Y$ ,  $\{X_i; i \in I\}$  est U.I.

**Théorème 0.2.2** Si  $X_n \xrightarrow[p]{} X$  et si la suite  $(X_n)$  est U.I, alors,  $X \in L^1$  et  $X_n \xrightarrow[L^1]{} X$ .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du critère 0.2.3.

**Théorème 0.2.3** Si  $X_n \xrightarrow[p]{} X$ , alors il existe une extraction  $\phi$  telle que  $X_{\phi(n)} \xrightarrow[p.s]{} X$ .

**Théorème 0.2.4** Si  $X_n \xrightarrow[\mathcal{L}]{} c$ , où  $c$  est une constante alors  $X_n \xrightarrow[p]{} c$ .

### Deux résultats importants

**Théorème 0.2.5 (LFGN)** Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires i.i.d.

a) On suppose  $X \in L^1$ . En notant  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , on a

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \text{ p.s et } L^1]{} E[X_1].$$

b) Si  $E[|X_1|] = +\infty$  la suite  $S_n$  diverge presque sûrement.

**Théorème 0.2.6 (TCL)** Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose  $X \in L^2$  et l'on note  $m = E[X]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ . En posant  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , on a

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathcal{N}(0, 1).$$

### Simulation

## 0.3 Vecteurs gaussiens

Les variables aléatoires réelles gaussiennes ( $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ) ont été introduites dans l'exemple 0.1.1. En dimension supérieure, la généralisation de cette notion conduit au concept de vecteurs gaussiens.

**Définition 0.3.1** Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $X$  est un vecteur gaussien, si pour tout élément  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , la variable aléatoire réelle  $\langle x, X \rangle$  est une variable gaussienne.

**Exemple 0.3.1** Si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, alors,  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur gaussien.

Comme en dimension 1, la loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par deux paramètres :

**Proposition 0.3.1** Si  $X$  est un vecteur gaussien de  $\mathbb{R}^n$  alors,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\Phi_X(x) = e^{i\langle x, m \rangle} e^{-\frac{x^t \Sigma x}{2}}$$

où

$$m = (E[X_1], \dots, E[X_n])$$

et

$$\Sigma = [\text{cov}(X_i, X_j)]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Dans ce cas on dira que  $X$  suit une  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ .

**Corollaire 0.3.1** (cf. prop 0.2.1) Si  $X = (X_1, X_2)$  est un vecteur gaussien de  $\mathbb{R}^2$  alors

$$X_1 \perp X_2 \Leftrightarrow \text{cov}(X_1, X_2) = 0.$$

**Exercice 0.3.1** Soit  $(Z, X_1, \dots, X_n)$  un vecteur gaussien tel que  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $Z \perp X_i$ . Montrer que  $Z \perp (X_1, \dots, X_n)$ .

**Exercice 0.3.2** Soient  $G = (G_1, \dots, G_n)$  un  $n$ -échantillon de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $m \in \mathbb{R}^n$  et  $A$  une matrice carré de taille  $n$ . Montrer que  $m + AG$  suit une  $\mathcal{N}(m, AA^t)$ . Proposer ensuite un algorithme de simulation d'un vecteur gaussien quelconque (cf. exercice 0.2.1).

**Proposition 0.3.2** Si  $X$  suit une  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$  et si  $\Sigma$  est inversible, alors,  $X$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  de densité

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det(\Sigma))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t \Sigma^{-1} (x-m)}.$$

Si  $\Sigma$  n'est pas inversible, la loi de  $X$  est portée par un hyperplan et est donc étrangère à la mesure de Lebesgue.

## 0.4 Notion d'espérance conditionnelle

### 0.4.1 Conditionnement par rapport à un événement

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$  avec  $P(B) > 0$ . On définit

$$P(A|B) =: \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

De même si  $X \in L^1$ , on définit

$$E[X|B] =: \frac{E[X1_B]}{P[B]}.$$

### 0.4.2 Conditionnement par rapport à une variable aléatoire discrète

Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète (de support  $D$  au plus dénombrable). On suppose que  $\forall y \in D, P(Y = y) > 0$ .

Soit  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , on définit

$$P(A|Y) =: \phi(Y) \text{ où } \forall y \in D, \phi(y) = P(A|\{Y = y\}).$$

De même si  $X \in L^1$ , on définit

$$E[X|Y] =: \psi(Y) \text{ où } \forall y \in D, \psi(y) = E[X|Y = y].$$

Il est important de noter que  $P(A|Y)$  et  $E[X|Y]$  sont des variables aléatoires.

**Remarque 0.4.1** : *On voit immédiatement que la définition ci-dessus est propre au cas discret, en effet, lorsque  $Y$  est une variable aléatoire de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $P(Y = y) = 0$ . Il vaut mieux alors généraliser, la notion de conditionnement par rapport à un événement au cas des tribus.*

### 0.4.3 Conditionnement par rapport à une tribu

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité,  $X$  une variable aléatoire dans  $L^1$  et  $\mathcal{G}$  une sous tribu de  $\mathcal{A}$ .

**Définition 0.4.1** (Théorème) *Il existe une variable aléatoire  $Z \in L^1$  telle que*

*i)  $Z$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable*

*ii)  $E[XU] = E[ZU] \forall U \mathcal{G}$ -mesurable et bornée.*

*$Z$  est notée  $E[X|\mathcal{G}]$  et est appelée l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$ . De plus,  $Z$  est unique au sens où si  $Z'$  vérifie également i) et ii) alors  $Z = Z'$   $P$ -p.s.*

**Remarque 0.4.2 :** *Le résultat d'existence précédent est basé sur le puissant théorème de Radon-Nikodym (paragraphe 0.6). Dans le cas où  $X \in L^2$ , l'existence de  $Z$  peut se démontrer simplement à l'aide de techniques hilbertiennes. En effet, en considérant la projection orthogonale  $\Pi$  de  $L^2((\Omega, \mathcal{A}, P))$  sur le convexe fermé  $L^2((\Omega, \mathcal{G}, P))$  on montre facilement que  $\Pi(X) = E[X|\mathcal{G}]$ .  $E[X|\mathcal{G}]$  est donc la variable aléatoire  $\mathcal{G}$ -mesurable la plus "proche" de  $X$ .*

#### 0.4.4 Conditionnement par rapport à une variable aléatoire

Soit  $Y$  une variable aléatoire.

**Définition 0.4.2** *Si  $X \in L^1$  on définit  $E[X|Y]$  par  $E[X|\sigma(Y)]$ .*

Ainsi d'après la remarque 0.1.1,  $E[X|Y]$  est de la forme  $\psi(Y)$  où  $\psi$  est borélienne. On montre de plus que cette définition coïncide avec celle proposée dans le paragraphe 0.4.2 pour le cas discret.

**Remarque 0.4.3** *Toujours d'après la remarque 0.1.1, la définition précédente prend la forme suivante :*

*i)  $E[X|Y]$  est  $\sigma(Y)$ -mesurable*

*ii)  $E[Xg(Y)] = E[E[X|Y]g(Y)] \forall g$  borélienne et bornée.*

#### 0.4.5 Loi conditionnelle

On considère un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires réelles dans  $L^1$ . On suppose que la loi du couple possède une densité  $f_{(X,Y)}$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ . Les densités marginales de  $X$  et  $Y$  sont données par

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy \text{ et } f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx.$$

Lorsque  $X \perp Y$ , on a  $f_{(X,Y)} = f_X f_Y$ . Si l'hypothèse d'indépendance est relaxée on a la formule de désintégration suivante :  $f_{(X,Y)}(x, y) = f_{X|Y}(x, y) f_Y(y)$  où

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)}$$

si  $f_Y(y) \neq 0$  et  $f_{X|Y}(x, y) = 0$  sinon. La fonction  $f_{X|Y}$  est alors appelée densité conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$ . On peut voir, en effet, que si  $\phi$  vérifie  $\phi(X) \in L^1$ ,

$$E[\phi(X)|Y] = \Phi(Y) \text{ avec } \Phi(y) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_{X|Y}(x, y) dx.$$

### 0.4.6 Propriétés de l'espérance conditionnelle

#### Propriétés analogues à l'espérance

**Proposition 0.4.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires intégrables et  $\mathcal{G}$  une sous tribu de  $\mathcal{A}$ .

- a) (positivité) Si  $X \geq 0$   $P$ -p.s.,  $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$   $P$ -p.s.
- b) (linéarité) Si  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = \alpha E[X|\mathcal{G}] + \beta E[Y|\mathcal{G}]$   $P$ -p.s.
- c) (croissance) Si  $X \geq Y$   $P$ -p.s.,  $E[X|\mathcal{G}] \geq E[Y|\mathcal{G}]$   $P$ -p.s. (Considérer  $\{E[Y|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}] \geq \varepsilon\}$ .)
- d) (Beppo-lévy) Si  $X_n$  est une suite de variables aléatoires dans  $L^1$  positives avec  $X_n \uparrow X$   $P$ -p.s., alors  $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$   $P$ -p.s.
- e) (Fatou) Si  $X_n$  est une suite de variables aléatoires dans  $L^1$  positives, alors  $E[\liminf_n X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_n E[X_n|\mathcal{G}]$   $P$ -p.s.
- f) (Convergence dominée) Si  $X_n$  est une suite de variables aléatoires dans  $L^1$  telle que  $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n \leq Y$ , alors,  $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow[p.s. \text{ et } L^1]{} E[X|\mathcal{G}]$ .
- g) (Jensen) Si  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe positive, alors, lorsque  $\psi(X) \in L^1$ ,  $\psi(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[\psi(X)|\mathcal{G}]$   $P$ -p.s.

**Remarque 0.4.4** On déduit de g) que l'espérance conditionnelle est un opérateur contractant sur les espaces  $L^p$

#### Propriétés spécifiques à l'espérance conditionnelle

**Proposition 0.4.2** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires intégrables et  $\mathcal{G}$  une sous tribu de  $\mathcal{A}$ .

- a)  $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$
- b) Si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable,  $E[X|\mathcal{G}] = X$   $P$ -p.s.
- c) Si  $Y$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable bornée,  $E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$   $P$ -p.s.
- d) Si  $\sigma(X) \perp \mathcal{G}$ ,  $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$   $P$ -p.s.

e) Si  $\mathcal{G}'$  est une sous tribu de  $\mathcal{A}$  telle que  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ , alors,  $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}'] = E[X|\mathcal{G}']$  *P*-p.s.

f) Si  $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$  est une famille de sous tribus de  $\mathcal{A}$ , la famille  $(E[X|\mathcal{G}_i])_{i \in I}$  est U.I.

**Preuve :** On se contente de f), les autres assertions étant laissées en exercice. D'après l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle,

$$E[|E[X|\mathcal{G}_i]|1_{|E[X|\mathcal{G}_i]|>n}] \leq E[E[|X| |\mathcal{G}_i]|1_{|E[X|\mathcal{G}_i]|>n}] = E[|X|1_{|E[X|\mathcal{G}_i]|>n}].$$

Or, d'après l'inégalité de Tchebychev,

$$P(|E[X|\mathcal{G}_i]| > n) \leq \frac{E[|E[X|\mathcal{G}_i]|]}{n} \leq \frac{E[E[|X| |\mathcal{G}_i]]}{n} = \frac{E[|X|]}{n}.$$

On conclut en utilisant le lemme suivant :

**Lemme 0.4.1** Si  $X \in L^1$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $P(A) < \delta \Rightarrow E[|X|1_A] < \varepsilon$ .

□

Les propriétés ci-dessus sont souvent essentielles et suffisantes pour le calcul d'espérances conditionnelles. Le recours à la définition n'est utile que pour les cas les plus délicats, par exemple, la proposition ci-dessous.

Le résultat suivant sera utile dans notre étude du modèle de Black-Scholes et plus généralement pour démontrer le caractère Markovien de certains processus.

**Proposition 0.4.3** Si  $\sigma(X) \perp \mathcal{G}$  et si  $Y$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable, alors, pour toute fonction borélienne  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $E[|\Phi(X, Y)|] < \infty$ , on a

$$E[\Phi(X, Y)|\mathcal{G}] = \psi(Y) \text{ où } \psi(y) = E[\Phi(X, y)].$$

**Preuve :** On a  $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, y) dP_X(x)$  et la mesurabilité de  $\psi$  est une conséquence classique du théorème de Fubini. Soit  $G \in \mathcal{G}$ , on note  $Z = 1_G$ . On déduit des hypothèses que  $P_{(X, Y, Z)} = P_X \otimes P_{(Y, Z)}$ , ainsi,

$$E[\Phi(X, Y)1_G] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x, y) z dP_{(Y, Z)}(y, z) dP_X(x).$$

D'après Fubini,

$$E[\Phi(X, Y)1_G] = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(y) z dP_{(Y, Z)}(y, z)$$

donc

$$E[\Phi(X, Y)1_G] = E[\psi(Y)1_G].$$

□

### 0.4.7 Espérance conditionnelle et vecteurs gaussiens

**Proposition 0.4.4** *Soit  $(Z, X_1, \dots, X_n)$  un vecteur gaussien. Alors, il existe des constantes réelles  $(a, b_1, \dots, b_n)$  telles que*

$$E[Z|X_1, \dots, X_n] = a + \sum_{i=1}^n X_i b_i.$$

**Preuve :** Considérons le sous espace vectoriel fermé (car de dimension fini) de  $L^2$  engendré par  $(1, X_1, \dots, X_n)$ . On note  $\Pi$  la projection orthogonale sur ce convexe fermé. Il existe donc des constantes  $(a, b_1, \dots, b_n)$  telles que  $\Pi(Z) = a + \sum_{i=1}^n X_i b_i$ . En notant  $Y = Z - \Pi(Z)$ , on a classiquement  $E[Y] = 0$  et  $E[Y X_i] = 0$ . Ainsi,  $\text{cov}(Y, X_i) = 0$ . Le vecteur  $(Y, X_i)$  étant gaussien, d'après le corollaire 0.3.1,  $Y \perp X_i$ . D'après l'exercice 0.3.1,  $Y \perp (X_1, \dots, X_n)$  donc  $E[Y|X_1, \dots, X_n] = E[Y] = 0$ , ainsi,  $E[Z|X_1, \dots, X_n] = \Pi(Z) = a + \sum_{i=1}^n X_i b_i$ .  $\square$

## 0.5 Processus stochastiques

### 0.5.1 Généralités

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard, le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et d'une fonction  $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$  représentant l'état du système. Pour  $t$  fixé, l'état du système est une variable aléatoire  $X_t(\omega)$ , en revanche, pour une évolution particulière du système (i.e à  $\omega$  fixé) les états successifs sont représentés par la fonction  $t \rightarrow X_t(\omega)$  que l'on nomme par abus de langage une trajectoire.

**Définition 0.5.1** *Un processus aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indicé par un ensemble de temps  $T \subset \mathbb{R}_+$ , est une famille  $(X_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  à valeurs dans un certain espace  $E$  (pour nous  $E = \mathbb{R}$ ).*

Plusieurs notions permettant de comparer les processus existent et étendent les notions d'égalité en loi et *p.s* des variables aléatoires en prenant en compte l'évolution temporelle.

**Définition 0.5.2** *Deux processus  $(X_t)_{t \in T}$  et  $(Y_t)_{t \in T}$  sont dits équivalents ssi,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_n) \in T^n$*

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}).$$

*On dit également que les processus ont même marginales fini-dimensionnelles.*

**Définition 0.5.3** Un processus  $(X_t)_{t \in T}$  est une modification d'un processus  $(Y_t)_{t \in T}$  ssi,  $\forall t \in T$ ,

$$X_t = Y_t \text{ } P - \text{p.s.}$$

**Définition 0.5.4** Deux processus  $(X_t)_{t \in T}$  et  $(Y_t)_{t \in T}$  sont dits indistinguables ssi

$$P(\{\omega | \forall t \in T, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1$$

**Remarque 0.5.1** Les définitions précédentes sont de plus en plus restrictives (exercices).

**Définition 0.5.5** On dit que les trajectoires d'un processus sont continues (ou monotones, ou cadlag) ssi, pour  $P$  presque tout  $\omega$ ,  $t \in T \rightarrow X_t(\omega)$  est continue (ou monotone, ou cadlag). On dira par abus de langage que le processus est continu (ou monotone, ou cadlag).

**Exercice 0.5.1** Soient  $(X_t)_{t \in T}$  et  $(Y_t)_{t \in T}$  deux processus stochastiques.

1) En supposant que les deux processus sont continus à droite, montrer que si  $(X_t)_{t \in T}$  est une modification de  $(Y_t)_{t \in T}$ , les processus sont indistinguables.

2) Sur l'espace de probabilités  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dx)$ , soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le processus défini par  $X_t(\omega) = \omega + at$  et  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le processus défini par  $Y_t(\omega) = \omega + at$  si  $t \neq \omega$  et  $Y_t(\omega) = 0$  sinon. Montrer que  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une modification de  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  mais que ces deux processus ne sont pas indistinguables.

Pour simplifier les choses nous supposons désormais que  $T = \mathbb{R}_+$ . Soit  $(X_t)_{t \in T}$  un processus. Fixons un nombre fini d'instants  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ . On note  $P_{t_1, \dots, t_n}$  la loi du vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . Remarquons très simplement que pour toute famille  $(A_1, \dots, A_n)$  de Boréliens, pour  $t_{n+1} \geq t_n$ , on a

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(A_1 \times \dots \times A_n \times \mathbb{R}). \quad (1)$$

Le théorème suivant dû à Kolmogorov assure l'existence d'un processus stochastique associé à une famille de marginales fini-dimensionnelles pourvu qu'une condition de compatibilité naturelle de type (1) soit vérifiée. Ce théorème se révèle utile pour démontrer de manière abstraite l'existence d'un processus en particulier.

**Théorème 0.5.1** Soit une famille de probabilités

$$\{P_{t_1, \dots, t_n}; n \geq 1, 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n\}$$

telle que :

a)  $P_{t_1, \dots, t_n}$  est une probabilité sur  $\mathbb{R}^n$

b) Si  $\{0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_m\} \subset \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n\}$  alors

$$\pi_* P_{t_1, \dots, t_n} = P_{s_1, \dots, s_m}$$

où  $\pi$  est la projection naturelle de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^m$ .

Il existe alors un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  dont les marginales fini-dimensionnelles sont exactement les  $\{P_{t_1, \dots, t_n}\}$ .

Un processus étant une fonction de deux variables, on a une définition naturelle de la mesurabilité.

**Définition 0.5.6** Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit mesurable si la fonction

$$(t, \omega) \in (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \times (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

est mesurable i.e  $\forall T \in \mathbb{R}_+, \forall A \in \mathcal{A}$ ,

$$\{(t, \omega); 0 \leq t \leq T, X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

**Remarque 0.5.2** Notons que si  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est mesurable, si  $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , la variable aléatoire  $Y_t = \int_0^t f(X_s) ds$  est bien définie.

**Exercice 0.5.2** Montrer qu'un processus à trajectoire  $C^0$  à droite (ou  $C^0$  à gauche) est mesurable. (Considérer  $X_t = X_0 + \lim_n X_n$  avec  $X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{k+1}{2^n}} 1_{\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}}(\cdot)$ .)

**Définition 0.5.7** On note classiquement

$$L^2(\Omega \times [0, T]) = \left\{ (X_t)_{t \in [0, T]} \text{ mesurable; } E \left[ \int_0^T X_s^2 ds \right] < \infty \right\}$$

qui équipé de la norme naturelle associée est un espace de Hilbert.

## 0.5.2 Filtrations, processus adaptés

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité.

**Définition 0.5.8** Une famille croissante  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de sous-tribus de  $\mathcal{A}$  s'appelle une filtration. Cette tribu est dite complète si  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t$  contient les ensembles négligeables  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{A}$  où

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega; \exists A \in \mathcal{A}, N \subset A, P(A) = 0\}.$$

**Remarque 0.5.3** Du point de vue de la modélisation,  $\mathcal{F}_t$  représente l'information disponible à la date  $t$ . On peut de plus toujours se ramener au cas d'une tribu complète en changeant  $\mathcal{F}_t$  en  $\sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{F}_t)$ .

Dorénavant, au vue de la remarque précédente, les tribus que nous considérerons seront supposées complètes.

**Définition 0.5.9** Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  si  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable.

**Remarque 0.5.4** Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est toujours adapté à sa filtration naturelle  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t)$ .

**Remarque 0.5.5** L'intérêt de travailler avec des tribus complètes est que

a) si  $X_t \stackrel{P-p.p.}{=} Y_t$  et si  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable  $\Rightarrow Y_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable (ainsi une modification d'un processus adapté est adaptée).

b) si  $X_t^n \xrightarrow{p.p.} X_t$  et si  $\forall n \geq 0, X_t^n$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable  $\Rightarrow X_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable.

La notion dynamique (liée à une filtration) de mesurabilité introduite ci-dessus est restrictive. Elle omet le fait qu'un processus est une fonction de deux variables.

**Définition 0.5.10** Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit progressivement mesurable si,  $\forall T > 0$  la fonction

$$(t, \omega) \in ([0, T], \mathcal{B}([0, T])) \times (\Omega, \mathcal{F}_T) \rightarrow X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

est mesurable.

**Exercice 0.5.3** Pour tout  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ , soient  $F_{t_i}$  des variables aléatoires  $\mathcal{F}_{t_i}$  mesurables. On note

$$X_t = \sum_{i=1}^{n-1} F_{t_i} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t). \quad (2)$$

Montrer que  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  est progressivement mesurable. On notera  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  les éléments de la forme (2) avec  $F_{t_i} \in L^2(\mathcal{F}_{t_i})$ .

**Remarque 0.5.6** Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

**Exercice 0.5.4** Montrer que lorsque  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est progressivement mesurable le processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  défini dans la remarque 0.5.2 est adapté (Utiliser Fubini).

**Proposition 0.5.1** *Si un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est  $C^0$  à droite (ou  $C^0$  à gauche) et adapté alors il est progressivement mesurable.*

**Preuve :** Dans le cas  $C^0$  à gauche on pose  $X_n(t) = X_{[n\frac{t}{T}] \frac{T}{n}}$ . On a  $\forall t, X_t^n \xrightarrow[p.p.]{} X_t$ .  
Or  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\{(t, \omega); 0 \leq t \leq T, X_t^n \in B\} = [0, \frac{T}{n}] \times \{X_0 \in B\} \cap \dots \in \mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}_T$$

d'où le résultat. On procède de la même manière dans le cas  $C^0$  à droite en posant  $X_n(t) = X_{\inf(T, ([n\frac{t}{T}] + 1)\frac{T}{n})}$ .  $\square$

**Définition 0.5.11** *On note*

$$L_{prog}^2(\Omega \times [0, T]) = \left\{ (X_t)_{t \in [0, T]} \text{ prog mes; } E \left[ \int_0^T X_s^2 ds \right] < \infty \right\}.$$

**Théorème 0.5.2** *L'espace  $L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$  munit de sa norme naturelle est un espace de Hilbert. De plus,  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  est dense dans  $L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$ .*

**Preuve :** Nous démontrons seulement la deuxième partie du théorème, la première étant un résultat classique de théorie des probabilités.

On introduit tout d'abord une procédure d'approximation dans le cas déterministe. Soit  $f \in L^2([0, T], dx)$ , on note  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, T]$ ,

$$P_n(f)(t) = n \sum_{i=0}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(s) ds 1_{] \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} ]}(t).$$

On peut voir que l'opérateur linéaire  $P_n$  est contractant en effet, si  $t \in ] \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} ]$

$$[P_n(f)(t)]^2 \leq n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f^2(s) ds$$

et donc

$$\int_0^T [P_n(f)(t)]^2 dt \leq \int_0^T [f(t)]^2 dt.$$

On peut montrer également que,  $\forall f \in C_K([0, T], \mathbb{R})$ ,

$$P_n(f) \xrightarrow{L^2([0, T])} f \tag{3}$$

et étendre ce résultat à toute  $f \in L^2([0, T])$  par densité. On étend maintenant cette procédure à  $L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$ . On pose  $\forall X \in L_{prog}^2(\Omega \times [0, T]), \forall t \in [0, T]$ , pour presque tout  $\omega$ ,

$$P_n(X_t(\omega)) = P_n(X(\omega))(t).$$

Comme  $\forall X \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ ,  $P_n(X) \in \mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  car notamment (exercice 0.5.4)  $\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} X_s ds$  est  $\mathcal{F}_{\frac{i}{n}}$  mesurable. Il est alors très simple en utilisant (3) et le théorème de convergence dominée de démontrer la convergence de  $P_n(X)$  vers  $X$  dans  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  :  $X$  appartenant à  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ , pour presque tout  $\omega$ ,  $X_s(\omega) \in L^2([0, T])$  et donc d'après (3),

$$\int_0^T (P_n(X_s) - X_s)^2 ds \xrightarrow[p.p.]{} 0$$

en restant majoré (inégalité de Minkowski) par  $4\|X(\omega)\|_{L^2([0, T])}^2 \in L^2(P)$ .  $\square$

### 0.5.3 Processus gaussiens

**Définition 0.5.12** *Un processus stochastique  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est gaussien ssi,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ , le vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est gaussien.*

La loi d'un processus gaussien est caractérisée par deux fonctions, sa fonction d'espérance  $m : t \rightarrow E[X_t]$  et sa fonction de covariance  $\Gamma : (s, t) \rightarrow E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$  qui est une fonction symétrique de type positif au sens où  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ , la matrice carrée  $[\Gamma(t_i, t_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$  est symétrique positive.

Nous avons en effet le résultat suivant, simple conséquence du théorème de Kolmogorov.

**Proposition 0.5.2** *Soient  $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque et  $\Gamma : (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de type positif. Alors, il existe un processus gaussien de fonction d'espérance  $m$  et de fonction de covariance  $\Gamma$ .*

**Exemple 0.5.1** *Montrer que la fonction  $(s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \inf(s, t)$  est de type positif. (On pourra procéder par récurrence)*

### 0.5.4 Martingales en temps continu

Nous renvoyons le lecteur à ? pour une présentation consistante de la théorie des martingales.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité et  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une filtration de cet espace.

**Définition 0.5.13** *Une famille adaptée  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de variables aléatoires dans  $L^1$  est :*

- une martingale si,  $\forall t \geq s$ ,  $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ . (jeu équitable)
- une surmartingale si,  $\forall t \geq s$ ,  $E[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s$ . (jeu perdant)
- une sous-martingale si,  $\forall t \geq s$ ,  $E[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$ . (jeu gagnant)

**Remarque 0.5.7** Une martingale  $(M_t)$  vérifie  $\forall t \geq 0$   $E[M_t] = E[M_0]$ .

**Exemple 0.5.2** Si  $X \in L^1$ ,  $M_t = E[X|\mathcal{F}_t]$  est, d'après la proposition 0.4.2, une martingale.

Les résultats suivants nous seront utiles par la suite.

**Proposition 0.5.3** Soit  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une martingale de carré intégrable, alors,  $\forall s \leq t$ , on a

$$E[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s].$$

**Preuve :** On a

$$E[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s] = E[M_t^2|\mathcal{F}_s] - 2E[M_t M_s|\mathcal{F}_s] + \underbrace{E[M_s^2|\mathcal{F}_s]}_{M_s^2}.$$

Le résultat découle alors de l'égalité  $E[M_t M_s|\mathcal{F}_s] = M_s^2$ .  $\square$

**Proposition 0.5.4** Une martingale de carré intégrable  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est à accroissements orthogonaux.

**Preuve :** Il suffit de prouver que pour  $t_4 > t_3 \geq t_2 > t_1$

$$E[(M_{t_4} - M_{t_3})(M_{t_2} - M_{t_1})] = 0.$$

Ce qui s'obtient en conditionnant par rapport à  $\mathcal{F}_{t_3}$ .  $\square$

**Proposition 0.5.5** Soit  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une martingale continue de carré intégrable telle qu'il existe  $(\Phi_t)_{t \in [0, T]} \in L^2(\Omega \times [0, T])$  vérifiant,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,  $M_t = \int_0^t \Phi_s ds$ . Alors

$$P(\{\omega; \forall 0 \leq t \leq T, M_t = 0\}) = 1.$$

**Preuve :** On a d'après la proposition précédente,

$$E[M_t^2] = E \left[ \left( \sum_{i=1}^n M_{\frac{it}{n}} - M_{\frac{(i-1)t}{n}} \right)^2 \right] = E \left[ \sum_{i=1}^n \left( M_{\frac{it}{n}} - M_{\frac{(i-1)t}{n}} \right)^2 \right].$$

Ainsi d'après l'inégalité de Schwartz,

$$E[M_t^2] = E \left[ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \Phi_s ds \right)^2 \right] \leq \frac{t}{n} E \left[ \int_0^t \Phi_s^2 ds \right].$$

Le résultat s'obtient par passage à la limite et en utilisant la continuité des trajectoires de  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .  $\square$

Nous n'aborderons pas ici (par manque de temps) la notion de temps d'arrêt et sa relation fructueuse avec la théorie des martingales. Cependant, nous énonçons le résultat fondamental suivant qui nous assure que pour contrôler l'évolution d'une martingale sur un segment il suffit de contrôler sa valeur terminale.

**Théorème 0.5.3** (*Inégalité de Doob*) Soit  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une martingale de carré intégrable et à trajectoires continues, alors,  $\forall T \in \mathbb{R}_+$ ,

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right] \leq 4E[|M_T|^2].$$

On notera dorénavant  $M^2([0, T])$  l'espace des martingales sur  $[0, T]$  de carré intégrable et à trajectoires continues (quotienté par la relation d'équivalence  $M \sim M'$  ssi  $M$  et  $M'$  sont indistinguables). Si  $(M_t)_{t \in [0, T]} \in M^2([0, T])$  on note  $\| \cdot \|_{M^2}$  l'application définie par  $\|M\|_{M^2} = E[|M_T|^2]$ . On a alors la proposition suivante :

**Proposition 0.5.6** *L'application  $\| \cdot \|_{M^2}$  définie sur  $M^2([0, T])$  est une norme. L'espace  $M^2([0, T])$  muni de  $\| \cdot \|_{M^2}$  est un espace de Hilbert.*

**Preuve :** On admet le second point, le premier est une conséquence immédiate de l'inégalité de Doob.  $\square$

**Remarque 0.5.8** *Pour la complétude de  $M^2([0, T])$ , la complétude de la filtration est indispensable.*

## 0.6 Théorème de Radon Nikodym

**Définition 0.6.1** Soient  $P$  et  $Q$  deux probabilités définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

a) On dit que  $P$  est absolument continue par rapport à  $Q$  (not :  $P \ll Q$ ) si  $\forall A \in \mathcal{A}, Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ .

b) On dit que  $P$  et  $Q$  sont équivalentes (not :  $P \sim Q$ ) si  $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$ .

c) On dit que  $P$  et  $Q$  sont étrangères (not :  $P \perp Q$ ) si  $\exists A \in \mathcal{A}$ , tel que  $P(A) = 0$  et  $Q(A) = 1$ .

Le théorème suivant nous sera utile pour une bonne compréhension des changements de probabilités dans les modèles financiers.

**Théorème 0.6.1 (Radon-Nikodym)** Soient  $P$  et  $Q$  deux probabilités définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Alors  $P \ll Q$  si et seulement si il existe une variable aléatoire  $Z \geq 0$   $Q$ -intégrable (unique à égalité  $Q$  p.s près) vérifiant  $E_Q[Z] = 1$  telle que,  $\forall A \in \mathcal{A}$ ,

$$P(A) = E_Q[Z1_A].$$

On appelle  $Z$  la densité de Radon-Nikodym de  $P$  par rapport à  $Q$ . Elle est généralement notée  $Z =: \frac{dP}{dQ}$ .

**Remarque 0.6.1** Si  $P \sim Q$  on voit facilement que  $Z > 0$   $Q$  (ou  $P$ ) p.s, dans ce cas,  $\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{\frac{dQ}{dP}}$ .

**Exercice 0.6.1** le but est ici de démontrer le théorème-définition 0.4.1. Soit  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , on veut démontrer l'existence de  $E[X|\mathcal{G}]$ .

a) Montrer que l'on peut supposer  $X \geq 0$ .

b) Montrer que la fonction définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  par

$$Q(A) = \int_A X dP$$

est une mesure positive bornée telle que  $Q \ll P$ .

c) Montrer qu'il en est de même pour la restriction de  $Q$  à  $(\Omega, \mathcal{G})$ .

d) En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, proposer un candidat naturel pour  $E[X|\mathcal{G}]$ .

**Exemple 0.6.1** (*Un premier pas vers Girsanov*) On considère une variable aléatoire  $X$  suivant, sous une probabilité  $P$ , une  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ . Le but est de trouver une probabilité  $Q$  équivalente à  $P$  telle que, sous  $Q$ ,  $X$  suit une  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Considérons la variable

$$L = e^{-\frac{mX}{\sigma^2}} e^{+\frac{m^2}{2\sigma^2}}.$$

D'après l'exemple 0.1.2, on voit facilement que  $E_P[Z] = 1$ , on définit alors la probabilité  $Q$  par  $L = \frac{dQ}{dP}$ . Comme

$$E_Q[e^{itX}] = E_P[Le^{itX}] = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

on a le résultat.

# Bibliographie

- [1] N. BOULEAU : *Probabilité de l'ingénieur*, Hermann , 1986.
- [2] J. JACOD, P. PROTTER : *Probability essentials*, Springer, 2004.
- [3] D. WILLIAMS, *Probability with martingales*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.



# Chapitre 1

## Le mouvement Brownien

Ce chapitre a été rédigé (trop???) rapidement, merci à vous de me signaler les coquilles ou erreurs éventuelles.

### 1.1 Un peu d'histoire

Nous renvoyons le lecteur à [9] pour un riche exposé historique couvrant la période 1900-1950.

Le mouvement Brownien est le plus célèbre et le plus important processus stochastique. Il est un exemple frappant des relations fructueuses qui unissent par moment les mathématiques et la physique. Avant d'être un objet mathématique rigoureux, il a pu être observé sous diverses formes. On peut raisonnablement penser que tout commence aux alentours de 1830, lorsque le botaniste Brown observe le mouvement des particules de pollen en suspension dans l'eau. Ce mouvement est en partie expliqué, quelques années plus tard (1877) par Delsaux, en mettant en lumière l'interaction des particules de pollen avec les molécules d'eau qui provoque un changement incessant de direction de trajectoire via de multiples chocs thermiques (on trouvera une superbe simulation de ce phénomène à l'adresse "<http://chaos.nus.edu.sg/simulations/>"). En 1900, Bachelier, dans des travaux pionniers qui seront à la base de la finance mathématique moderne, reprend ces idées essentielles pour modéliser le cours d'un actif financier, soulignant par ailleurs son caractère Markovien (voir [2]). C'est Einstein qui en 1905 ([6]) en donne une définition raisonnable.

On note  $X_t$  la position à l'instant  $t$  d'une petite particule évoluant dans un liquide. On suppose que

- a)  $X_{t+h} - X_t$  est indépendant de  $\sigma(X_s; s \leq t)$ .
- b) La loi de  $X_{t+h} - X_t$  ne dépend pas de  $t$ .
- c) Les trajectoires sont continues.

La première hypothèse signifie que l'évolution de la trajectoire sur  $[t, t + h]$  est uniquement due aux chocs que subit la particule durant cette période, le phénomène d'inertie (et donc dans un sens la masse de la particule) est négligé. La seconde que la situation est identique à elle-même au cours du temps (pas de variations de température). La troisième que la particule ne saute pas. Notons enfin qu'aucune précision sur le caractère gaussien n'est faite *a priori*, celle-ci étant une conséquence (cf. infra) des autres hypothèses. Einstein parvient à calculer la densité de transition de ce processus  $P(X_{t+h} \in dy | X_t = x) = q(t, x, y)$  et à relier ses résultats à l'équation de la chaleur (l'équation  $-\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0$  de condition initiale  $u(0, \cdot) = f$  admet pour solution  $u(t, x) = E[f(X_{t+h}) | X_0 = x]$ ). Un pont sans précédent entre l'analyse et les probabilités vient d'être amorcé, riche de conséquences...

D'un point de vue mathématique, la preuve rigoureuse de l'existence d'un tel processus n'apparaîtra que bien plus tard (1923) dans les travaux de N. Wiener [16]. Son étude fine, initiée par P. Lévy [12], occupe encore aujourd'hui de nombreux mathématiciens de part le monde. Dans le domaine de l'ingénierie, il s'est imposé au cours de ces dernières années comme un outil essentiel voir indispensable. Notons enfin, que Wendelin Werner a obtenu en 2006 la médaille Fields pour ses découvertes concernant les objets plans aléatoires en liaison avec la physique statistique (on peut voir à l'adresse suivante "[http://www.canalu.fr/canalu/chainev2/utls/programme/324388617/sequence\\_id/1010501222/format\\_id/3003/](http://www.canalu.fr/canalu/chainev2/utls/programme/324388617/sequence_id/1010501222/format_id/3003/)" son intervention à l'université de tous les savoirs).

Avant de rentrer dans le vif du sujet et pour justifier la définition du mouvement Brownien que nous adopterons dans le prochain paragraphe nous démontrons le résultat suivant.

**Lemme 1.1.1** *Soit  $X_t$  vérifiant les hypothèses a), b) et c) ci-dessus. On suppose  $X_0 = 0$ , alors, il existe  $m$  et  $\sigma^2$  tels que  $X_t$  suive une  $\mathcal{N}(mt, \sigma^2 t)$ .*

**Preuve :** Nous allons supposer (c'est en fait une conséquence un peu technique des hypothèses, voir par exemple [8]) pour simplifier les choses que

$$\sup_{t \leq 1} E[X_t^2] < +\infty.$$

Dans ce cas, les trajectoires du processus sont continues dans  $L^1$ . En effet, soit  $\varepsilon > 0$ , on tire de

$$E[|X_t - X_s|] = E[|X_t - X_s| 1_{|X_t - X_s| > \varepsilon}] + E[|X_t - X_s| 1_{|X_t - X_s| \leq \varepsilon}]$$

et de l'inégalité de Holder que

$$E[|X_t - X_s|] \leq E[|X_t - X_s|^2]^{\frac{1}{2}} P(|X_t - X_s| > \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon.$$

Le résultat est alors prouvé car la continuité des trajectoires entraîne leur continuité en probabilité.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $X_{nt} = X_t + (X_{2t} - X_t) + \dots + (X_{nt} - X_{(n-1)t})$ , donc d'après b),  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$E[X_{nt}] = nE[X_t].$$

Soit  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ , d'après le relation précédente

$$pE[X_1] = E[X_p] = E[X_{(\frac{p}{q})q}] = qE[X_{\frac{p}{q}}],$$

donc,  $\forall s \in \mathbb{Q}$ ,  $E[X_s] = sE[X_1]$ . Et par continuité des trajectoires dans  $L^1$ , on a,

$$\forall t \in \mathbb{R}, E[X_t] = tE[X_1] = tm.$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on montre que

$$E[(X_s - ms)^2] = sE[(X_1 - m)^2], \forall s \in \mathbb{Q},$$

cette relation s'étendant à  $\mathbb{R}$  tout entier car la fonction  $t \rightarrow E[(X_t - mt)^2]$  est croissante. En effet d'après b),

$$E[(X_{t+h} - m(t+h))^2] = E[(X_t - mt)^2] + E[(X_h - mh)^2] \geq E[(X_t - mt)^2].$$

En écrivant alors,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$X_t = (X_{\frac{t}{n}} - X_0) + \dots + (X_{\frac{nt}{n}} - X_{\frac{(n-1)t}{n}})$$

où les variables  $(X_{\frac{kt}{n}} - X_{\frac{(k-1)t}{n}})$  sont i.i.d de moyenne  $\frac{tm}{n}$  et de variance  $\frac{t\sigma^2}{n}$ , un argument analogue à celui utilisé dans la preuve du T.C.L (D.L de la fonction caractéristique) nous donne le résultat (voir [5]).  $\square$

## 1.2 Définition, existence, simulation

### 1.2.1 Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité. Pour simplifier les choses, on suppose que notre intervalle d'étude est borné (on prendra  $[0, T]$  avec souvent  $T = 1$  mais cela ne change rien).

Le mouvement Brownien est un processus  $(B_t)_{t \in [0,1]}$  continu dont les accroissements sont indépendants, stationnaires et gaussiens. Plus précisément,

**Définition 1.2.1** Un mouvement Brownien (standard) (M.B) est un processus  $(B_t)_{t \in [0,1]}$  vérifiant :

- a)  $B_0 = 0$   $P$ -p.s.
- b)  $B$  est continu i.e  $t \rightarrow B_t(w)$  est continue pour  $P$  presque tout  $w$ .
- c)  $B$  est à accroissements indépendants : Si  $t > s$ ,  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_u, u \leq s)$ .
- d) Les accroissements de  $B$  sont stationnaires, gaussiens : Si  $t \geq s$ ,  $B_t - B_s$  suit une  $\mathcal{N}(0, t - s)$ .

**Remarque 1.2.1** a) Conformément à ce qui a été précisé dans le paragraphe 0.5, on suppose que la tribu  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0,1]}$  est complète.

b) Par un raisonnement analogue à celui formulé dans la démonstration du lemme 1.1.1, l'assertion d) peut être remplacée par "Les accroissements de  $B$  sont stationnaires, centrés, de carré intégrable avec  $\text{Var}(B_1) = 1$ ".

c) Par un raisonnement classique de classe monotone on montre que l'assertion c) est équivalente à "Pour tout  $t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s < t$ ,  $B_t - B_s \perp (B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ " (voir [4]).

On peut proposer une définition équivalente en liaison avec la théorie des processus gaussiens.

**Proposition 1.2.1** Un processus  $(B_t)_{t \in [0,1]}$  est un M.B ssi c'est un processus gaussien, continu, centré, de fonction de covariance  $\Gamma[s, t] = \inf(s, t)$ .

**Preuve :**  $\Rightarrow$  Pour  $t_1 \leq \dots \leq t_n$  le vecteur  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$  constitué de gaussiennes indépendantes est un vecteur gaussien. Ainsi par combinaisons linéaires  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$  l'est également. Le M.B est un processus gaussien continu. Il est de plus centré et si  $t \geq s$

$$\text{cov}(B_t, B_s) = E[B_t B_s] = E[(B_t - B_s) B_s] + E[(B_s)^2] = s.$$

$\Leftarrow$  On vérifie la définition point par point.

- a)  $E[(B_0)^2] = 0$  donc  $B_0 = 0$   $P$ -p.s.
- b)  $B$  est continu par hypothèse.
- c) Pour  $t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s < t$  le vecteur  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_t - B_s)$  est gaussien avec  $\text{cov}(B_t - B_s, B_{t_i}) = 0$ . Ainsi (corollaire et exercice 0.3.1)  $B_t - B_s \perp (B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$  et donc d'après la remarque ci dessus,  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_u, u \leq s)$ .
- d) Enfin, pour  $s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est gaussienne, centrée de variance  $\text{Var}(B_t - B_s) = t + s - 2\inf(s, t) = t - s$ .  $\square$

### 1.2.2 Existence, construction, simulation

Plusieurs méthodes, plus ou moins abstraites, permettent de construire le M.B. Ces méthodes reposent généralement sur des résultats non triviaux.

#### Randomisation d'un espace de Hilbert

Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de variables aléatoires i.i.d suivant la loi normale centrée réduite. On considère l'espace de Hilbert  $H = L^2([0, 1], dx)$  et l'on note  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base orthonormée de  $H$ . On note,  $\forall t \in [0, 1]$ ,

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds g_n$$

(la série convergeant dans  $L^2$ ). D'après l'exercice 0.2.2, la variable  $B_t$  est gaussienne, centrée, de variance

$$\text{Var}(B_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^t \chi_n(s) ds \right)^2 = t.$$

De la même manière, on montre facilement que  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  est un processus gaussien, centré et de fonction de covariance égale à  $\Gamma[s, t] = \inf(s, t)$ . En vertu de la proposition 1.2.1, reste à démontrer la continuité. L'étude précise de la série aléatoire peut nous permettre de conclure (en étudiant sa convergence uniforme presque sûre) mais se révèle un peu technique ([13]). Un tour de passe-passe est d'utiliser le puissant (trop puissant dans ce cas??) théorème de Kolmogorov (voir [1]) :

**Théorème 1.2.1** (*Critère de continuité*) Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  un processus stochastique vérifiant la relation suivante,  $\forall T > 0, \exists C_T \geq 0, \forall 0 \leq s < t \leq T$ ,

$$E[|X_t - X_s|^p] \leq C_T |t - s|^\alpha \tag{1.1}$$

où  $p > 0$  et  $\alpha > 1$ . Alors, il existe une modification de ce processus qui possède des trajectoires continues.

Dans le cas de  $(B_t)$ , si  $\forall 0 \leq s < t \leq 1$ ,  $B_t - B_s$  suit une  $\mathcal{N}(0, t - s)$  et donc d'après l'exercice 0.1.1,

$$E[|B_t - B_s|^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} (t - s)^k.$$

D'où le résultat en prenant par exemple  $k = 2$ .

Les deux exemples qui suivent sont un cas particulier de la méthode ci-dessus avec un choix explicite pour la base hilbertienne.

### Représentation de Wiener (1923) ([16])

En considérant la base trigonométrique, on obtient une représentation explicite du mouvement Brownien à l'aide d'une série de Fourier aléatoire qui a été démontré par Wiener. Ce résultat est le premier résultat d'existence concernant le mouvement Brownien. On a

$$B_t = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} g_n \quad (1.2)$$

où la série converge uniformément presque sûrement sur  $[0, 1]$ . Notons que  $E[B_t] = 0$  et qu'un résultat classique donne

$$E[(B_t)^2] = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nt)}{n^2} = t.$$

### Méthode du point milieu (construction de Paul Lévy)

En 1939, Paul Lévy propose une construction simple du mouvement Brownien. Cette approche nouvelle lui permettra de découvrir des propriétés importantes de la trajectoire Brownienne. Nous proposons ici une approche purement algorithmique de cette construction, le lecteur étant renvoyé à [14] pour les détails plus techniques. Le but est ici d'obtenir à moindre frais une approche de simulation.

Pour  $s \leq t$  on sait (proposition 1.2.1) que le vecteur

$$(B_{\frac{t+s}{2}}, B_t, B_s)$$

est gaussien. On pose alors

$$Z = B_{\frac{t+s}{2}} - \frac{1}{2}(B_t + B_s)$$

qui est une variable aléatoire gaussienne telle que  $E[Z] = 0$  et  $Var(Z) = \frac{1}{4}(t-s)$ . En utilisant le corollaire 0.3.1, on montre que  $Z \perp (B_t, B_s)$  car  $cov(Z, B_t) = 0$  et  $cov(Z, B_s) = 0$ . On peut donc mettre  $Z$  sous la forme  $Z = \frac{\sqrt{t-s}}{2} G_{s,t}$  où  $G_{s,t}$  est une gaussienne standard indépendante de  $(B_t, B_s)$ .

**Remarque 1.2.2** *On peut montrer très simplement qu'en fait  $G_{s,t} \perp B_u$  lorsque  $u \leq s$  ou  $u \geq t$ .*

En conclusion

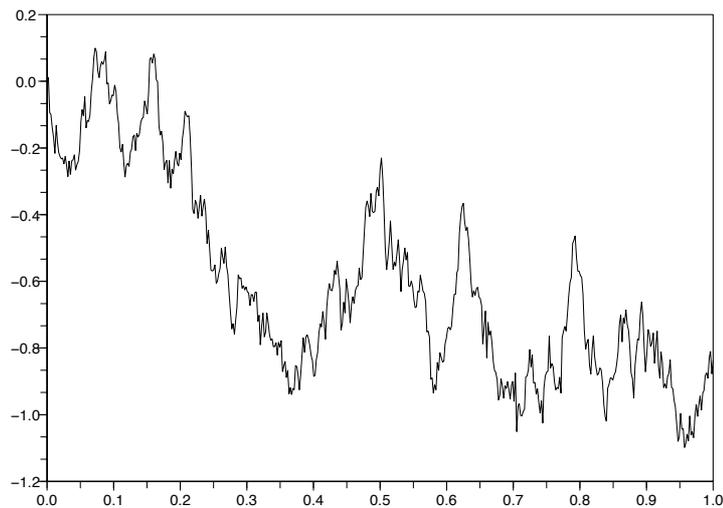
$$B_{\frac{t+s}{2}} = \frac{1}{2}(B_t + B_s) + \frac{\sqrt{t-s}}{2} G_{s,t}$$

$G_{s,t} \perp B_u$  lorsque  $u \leq s$  ou  $u \geq t$ .

On simule alors une trajectoire brownienne de la manière suivante :

- 1) On simule une famille  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de gaussiennes standards indépendantes (exercice 0.2.1).
- 2) On pose  $B_1 = G_1$
- 3) On pose  $B_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(B_1 + G_2)$
- 4) On pose  $B_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(B_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}G_3)$
- 5) On pose  $B_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}(B_{\frac{1}{2}} + B_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}G_4)$
- 6) Etc.....

**On obtient le résultat suivant sous scilab**



### Principe d'invariance de Donsker

Le principe d'invariance de Donsker est une généralisation fonctionnelle du T.C.L. On se donne une famille  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes, centrées et réduites. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = U_1 + \dots + U_n$  la n-ième somme partielle. D'après le T.C.L.,  $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$  et plus généralement,  $\forall t \in [0, 1]$ ,

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, t) \text{ (la loi de } B_t).$$

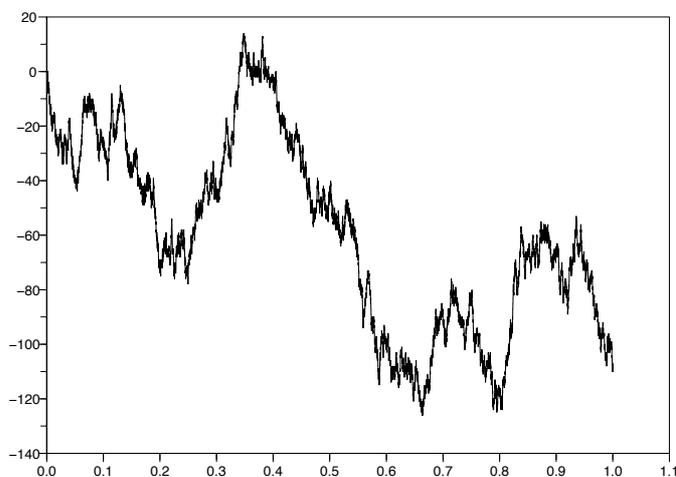
Considérons alors l'interpolation polygonale de rang  $n$  de la série des sommes partielles :  $\forall t \in [0, 1]$ , on pose

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1} \right). \quad (1.3)$$

Le résultat suivant (voir par exemple [1]) est dû à Donsker et fournit un outil de simulation des trajectoires Browniennes.

**Théorème 1.2.2** *La suite de processus continus  $(X_n)$  converge en loi dans  $\mathcal{C} = C([0, 1], \mathbb{R})$  vers la loi du M.B i.e  $\forall f \in C_b(\mathcal{C}, \mathbb{R})$ ,  $E[f(X_n)] \rightarrow E[f(B)]$ .*

La simulation suivante a été réalisée sous scilab en choisissant les  $U_i$  de sorte que  $P(U_i = 1) = P(U_i = -1) = \frac{1}{2}$  et en prenant  $n = 10000$ .



### 1.3 Propriétés

Les propriétés que nous voyons dans ce paragraphe sont assez rudimentaires. Pour des résultats plus fins on peut consulter par exemple ([15])

On considérera dans cette partie que  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un M.B sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 1.3.1 Propriétés de martingale

**Proposition 1.3.1** *Les processus  $(B_t)$ ,  $((B_t)^2 - t)$  et  $(e^{\theta B_t - \theta^2 \frac{t}{2}})$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) sont des  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in \mathbb{R}_+}$  martingales.*

On a la célèbre proposition suivante qui est dû à Paul Lévy.

**Proposition 1.3.2** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une martingale (par rapport à une certaine tribu  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ) continue issue de 0. Alors  $X$  est un M.B si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- a) *Le processus  $t \rightarrow (X_t)^2 - t$  est une martingale.*
- b) *Le processus  $t \rightarrow e^{\theta X_t - \theta^2 \frac{t}{2}}$  est une martingale pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

**Preuve :** Nous allons seulement montrer que a) implique que  $X_t$  est un M.B (le b) se fait en utilisant la formule d'Itô que nous verrons ultérieurement). Pour  $t > s$ , on a  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$E[e^{i\theta(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{\theta^2 \frac{t-s}{2}}$$

et en prenant l'espérance

$$E[e^{i\theta(X_t - X_s)}] = e^{\theta^2 \frac{t-s}{2}}.$$

Ceci montre à la fois que  $X_t - X_s \perp \mathcal{F}_s$  car si  $Y$  est  $\mathcal{F}_s$  mesurable,  $\forall u \in \mathbb{R}$

$$E[e^{i\theta(X_t - X_s) + iuY}] = E[E[e^{i\theta(X_t - X_s) + iuY} | \mathcal{F}_s]] = E[e^{iuY}] e^{\theta^2 \frac{t-s}{2}} = E[e^{iuY}] E[e^{i\theta(X_t - X_s)}],$$

et que  $X_t - X_s$  suit une  $\mathcal{N}(0, t - s)$ .  $\square$

### 1.3.2 Transformations

**Proposition 1.3.3** *On pose  $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$ ,  $s$  fixé,  $Y_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$ ,  $c > 0$ ,  $Z_t = tB_{\frac{1}{t}}$ ,  $t > 0$ ,  $Z_0 = 0$ . Alors, les processus  $-B_t$ ,  $B_t^{(s)}$ ,  $Y_t$  et  $Z_t$  sont des mouvements browniens standards.*

Le fait que  $Y_t$  soit un M.B est une propriété fondamentale. En effet, le M.B est un processus auto-similaire (ou un fractal aléatoire) i.e un processus dont le comportement reste le même à différentes échelles. (illustrer par une simulation!!!)

**Preuve de la proposition :** Pour  $-B_t$ ,  $B_t^{(s)}$ ,  $Y_t$  la vérification est immédiate, reste  $Z_t$ . Il est facile de voir que  $Z_t$  est un processus gaussien centré de fonction de covariance  $\Gamma(s, t) = \inf(s, t)$ . Reste à démontrer la continuité de  $Z$  (i.e sa

continuité en 0). Ce résultat est un peu technique ([14]) et nous allons nous contenter de montrer que  $\frac{B_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Comme

$$\frac{B_n}{n} = \frac{(B_n - B_{n-1}) + \dots + (B_1 - B_0)}{n}$$

où les  $(B_{i+1} - B_i)$  forment un  $n$ -échantillon de la loi normale centrée réduite, le résultat est une conséquence de la L.F.G.N.  $\square$

### 1.3.3 Propriétés trajectorielles

Les trajectoires du mouvement brownien sont caractérisées par une “remarquable” irrégularité. Nous nous proposons de mettre en évidence ici quelques unes de ces pathologies.

**Proposition 1.3.4** *Soit  $(B_t)$  un mouvement Brownien. Alors  $P$ -p.s.,*

$$a) \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow +0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty$$

$$b) \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \liminf_{t \rightarrow +0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

**Preuve :** Pour a) on considère la variable aléatoire

$$R = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t - B_s}{\sqrt{t}} \quad (\forall s \geq 0).$$

Par indépendance des accroissements Browniens  $R \perp \sigma(B_u, u \leq s)$  pour tout  $s \geq 0$  et donc  $R \perp \sigma(B_u, u \geq 0)$ . Ainsi  $R \perp R$  et donc  $R$  est une constante (finie ou infinie). Supposons que  $R$  est finie, ainsi par définition de la *lim sup*,  $P(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq R + 1) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Or  $P(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq R + 1) = P(B_1 \geq R + 1) > 0$  d'où le résultat. La deuxième partie de a) se traite de la même manière.

Le point b) est une conséquence immédiate de a) et de la symétrie du Brownien.  $\square$

**Corollaire 1.3.1** *i)  $P$ -p.s,  $(B_t)$  passe une infinité de fois par tout point.*

*ii)  $(B_t)$  n'est  $P$ -p.s dérivable ni à droite, ni à gauche en tout point.*

**Preuve :** i) est une conséquence directe de la continuité des trajectoires (qui vérifient donc le T.V.I) et de la proposition précédente.

ii) On peut voir que  $B_t$  n'est  $P$ -p.s pas dérivable à droite en 0 car  $\limsup_{t \rightarrow +0} \frac{B_t - B_0}{\sqrt{t}} = +\infty$   $P$ -p.s. En considérant ensuite (avec les notations de la proposition 1.3.3) les Browniens transformés  $B_t^s$  et  $Z_t$  on montre la non dérivabilité à droite et à gauche en tout point.  $\square$

**Remarque 1.3.1** *Les trajectoires du M.B sont donc des exemples explicites de fonctions continues nulle part dérivables. Notons que sans faire appel aux probabilités, la construction explicite d'un tel objet est loin d'être évidente (cf. fonction de Weierstrass). Du point de vue de la modélisation (§1.1), la non dérivabilité signifie qu'on ne peut définir la vitesse de la particule, ceci est donc physiquement très imparfait. Le fait d'avoir négligé la masse de la particule (pas d'inertie) est une explication de ce phénomène.*

**Proposition 1.3.5**

$$P(\{\omega; t \rightarrow B_t(w) \text{ est monotone sur un intervalle}\}) = 0$$

**Preuve :** On note  $F = \{\omega; \text{il existe un intervalle où } t \rightarrow B_t(w) \text{ est monotone}\}$ . On a

$$F = \bigcup_{(s,t) \in \mathbb{Q}^2, 0 \leq s < t} \{\omega; t \rightarrow B_t(w) \text{ est monotone sur } [s, t]\}.$$

Pour  $0 \leq s < t$  fixés dans  $\mathbb{Q}$ , on étudie par exemple

$$A = \{\omega; t \rightarrow B_t(w) \text{ est croissante sur } [s, t]\}.$$

Alors  $A = \bigcap_{n>0} \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i^n$  où  $A_i^n = \{\omega; B_{s+(t-s)\frac{i+1}{n}} - B_{s+(t-s)\frac{i}{n}} \geq 0\}$ . Par indépendance et stationnarité,

$$P\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} A_i^n\right) = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi,  $\forall n > 0$ ,  $P(A) \leq \frac{1}{2^n}$ , donc  $P(A)$  et  $P(F)$  sont nulles.  $\square$

### 1.3.4 Variation et variation quadratique

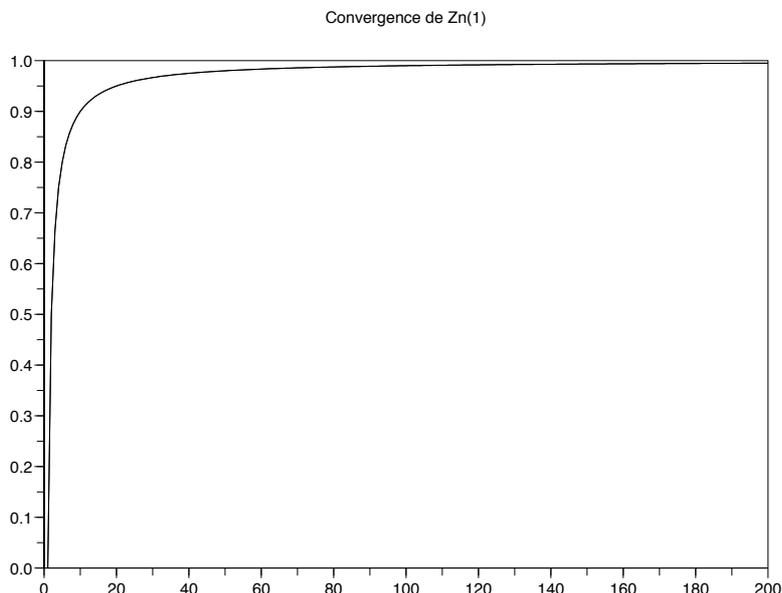
La proposition suivante sera fondamentale pour le reste du cours.

**Proposition 1.3.6** *Soit  $t > 0$ . On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{0, \dots, 2^n\}, t_j^n = \frac{tj}{2^n}$ . Alors,*

$$Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} |B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}|^2 \xrightarrow[p.s \text{ et } L^2]{} t.$$

**Preuve :** On a  $E[Z_t^n] = t$ . Ainsi pour la convergence dans  $L^2$  il faut montrer que  $Var(Z_t^n) \rightarrow 0$ . Or,

$$Var(Z_t^n) = \sum_{j=1}^{2^n} Var(|B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}|^2) = \sum_{j=1}^{2^n} \left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = 2^{-n}t^2,$$



la dernière égalité provenant du fait que  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  vérifie  $E[X^4] = 2\sigma^4$ . On a de plus que

$$E \left[ \sum_{n=1}^{\infty} |Z_t^n - t|^2 \right] < \infty.$$

Ainsi d'après l'inégalité de Tchebychev et la proposition 0.2.3 la convergence *p.s* est démontrée.  $\square$

### Corollaire 1.3.2

$$\sum_{j=1}^{2^n} |B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}| \xrightarrow[p.s.]{} +\infty.$$

*Le mouvement brownien n'est donc pas à variations bornées.*

**Preuve :** Supposons par l'absurde que  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} |B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}| < \infty) > 0$ .

Dans ce cas

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} |B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq 2^n} |B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} |B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}|.$$

La trajectoire brownienne étant continue sur  $[0, 1]$ , elle est uniformément continue, ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq 2^n} |B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}| = 0 \text{ } P - p.s.$$

Comme  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} |B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}| < \infty) > 0$ , ceci est en contradiction avec  $t > 0$ .

### 1.3.5 Caractère Markovien

La propriété suivante assure que le M.B est un processus de Markov c'est à dire un processus dont l'avenir ne dépend pas de tout le passé mais seulement du présent.

**Proposition 1.3.7** *Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée, pour tout  $s < t$ ,*

$$E[f(B_t) | \mathcal{F}_s^B] = E[f(B_t) | B_s] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{(y-B_s)^2}{2(t-s)}} dy.$$

**Preuve :** On écrit  $f(B_t) = f(B_t - B_s + B_s)$  et on utilise la proposition 0.4.3 et le fait que  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ .  $\square$

### 1.3.6 Le mouvement brownien géométrique

**Définition 1.3.1** *Soit  $(b, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ . Le processus*

$$X_t = X_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$$

*est appelé un Brownien géométrique.*

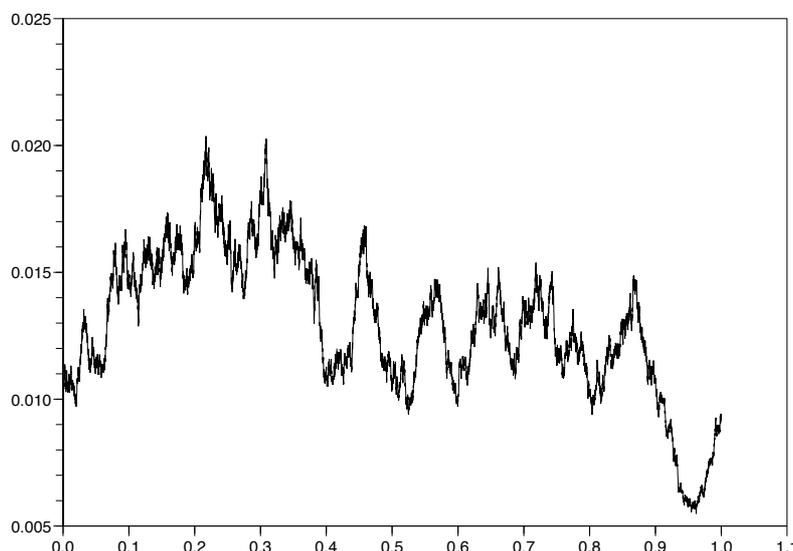
Ce processus est aussi appelé processus "log-normal" car lorsque  $X_0 = x > 0$ ,

$$\ln(X_t) = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t + \ln(x)$$

suit une loi normale.

**Remarque 1.3.2** *Comme nous savons simuler le M.B, il est très simple de simuler le Brownien géométrique.*

La simulation ci-dessous est réalisée pour  $b = 0$ ,  $\sigma = 1$ ,  $X_0 = 1$  et  $t \in [0, 1]$  (Le brownien étant simulé par la méthode de Donsker avec  $n = 10000$ ). Notons que ce processus est toujours strictement positif.



**Exercice 1.3.1** a) Montrer que le processus  $X_t e^{-bt}$  est une martingale.

b) Montrer que  $E[X_t | X_0] = X_0 e^{bt}$  et que  $Var(X_t | X_0) = X_0^2 e^{2bt} (e^{\sigma^2 t} - 1)$ .

c) Soit  $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , montrer que pour  $t > s$

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s^B] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X_s e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma y \sqrt{t-s}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

(C'est en particulier un processus de Markov)

### 1.3.7 Intégrale de Wiener

Le but de cette partie est de franchir un premier pas dans la construction de l'intégrale stochastique i.e l'intégrale par rapport au M.B. Nous nous limiterons au cas des intégrands déterministes (et d'intégrands stochastiques particulier) ce qui permet déjà de mettre en évidence les premières difficultés.

#### Rappels d'intégration

On pourra se référer à [14] pour un exposé plus complet sur le sujet.

Si  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction croissante continue (en fait continue à droite est suffisant) nulle en 0, un résultat classique nous assure l'existence d'une mesure

bornée  $m$  sur  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$  telle que  $g(t) = m([0, t])$  (si  $g$  est positive, la mesure  $m$  est positive et  $g$  est en fait la fonction de répartition associée). On définit alors très simplement l'intégrale par rapport à  $g$  en posant  $\forall f \in L^1(m)$ ,

$$\int_0^t f(s)dg(s) = \int 1_{[0,t]} f dm.$$

Cette construction va pouvoir s'étendre à une plus large classe de fonctions.

**Définition 1.3.2** Une fonction  $g [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite à variations bornées si

$$\sup \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| < \infty,$$

le sup étant pris sur toutes les subdivisions  $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$  de  $[0, 1]$ .

**Remarque 1.3.3** Si  $g$  est dérivable,  $g$  est à variations bornées et dans ce cas  $\int_0^t f(s)dg(s) = \int_0^t f(s)g'(s)ds$ .

**Proposition 1.3.8** Si  $g$  est une fonction à variations bornées, nulle en 0 et continue, il existe deux fonctions  $g_1$  et  $g_2$  croissantes, continues, nulles en 0 telles que  $g = g_1 - g_2$ . Ainsi on construit aisément l'intégrale par rapport à  $g$  à partir des intégrales par rapport à  $g_1$  et  $g_2$ .

En vertu du corollaire 1.3.2, on peut voir que pour  $P$  presque tout  $\omega$ , la trajectoire Brownienne n'est pas à variations bornées. Il est alors impossible de construire une intégrale par rapport à cette trajectoire en raisonnant  $\omega$  par  $\omega$ .

Nous allons cependant pouvoir proposer une définition probabiliste satisfaisante d'un tel objet.

### Construction de l'intégrale de Wiener

Une approche possible est de généraliser la technique de construction du M.B par randomisation d'un espace de Hilbert.

Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de variables aléatoires i.i.d suivant la loi normale centrée réduite. On considère l'espace de Hilbert  $H = L^2([0, 1], dx)$  et l'on note  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base orthonormée de  $H$ . On note,  $\forall f \in H$ ,

$$I(f)_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t f(s)\chi_n(s)ds g_n \quad (1.4)$$

(la série convergeant dans  $L^2$ ). En rappelant que  $B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds$ ,  $I(f)_t$  sera désormais notée  $\int_0^t f(s) dB_s$ . D'après l'exercice 0.2.2, la variable  $\int_0^t f(s) dB_s$  est gaussienne, centrée, de variance  $\int_0^t f^2(s) ds$ . Sa continuité en  $t$  peut se démontrer à la main (un peu technique) ou se déduire du théorème 1.2.1.

Les propriétés suivantes sont laissées en exercice au lecteur.

**Proposition 1.3.9** *Propriétés de l'intégrale de Wiener*

- a) L'application  $f \in H \rightarrow \int_0^t f(s) dB_s$  est linéaire.
- b) Le processus  $(\int_0^t f(s) dB_s)_{t \in [0,1]}$  est un processus gaussien continu, centré, de fonction de covariance  $\Gamma(s, t) = \int_0^{\inf(s,t)} f^2(u) du$ .
- c) Le processus  $(\int_0^t f(s) dB_s)_{t \in [0,1]}$  est un processus  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0,1]}$  mesurable à accroissements indépendants (mais non stationnaires).
- d) Si  $(f, g) \in H^2$ ,  $E \left[ \int_0^t f(s) dB_s \int_0^u g(s) dB_s \right] = \int_0^{\inf(t,u)} f(s) g(s) ds$ .
- e) Les processus  $(\int_0^t f(s) dB_s)_{t \in [0,1]}$  et  $((\int_0^t f(s) dB_s)^2 - \int_0^t f^2(s) ds)_{t \in [0,1]}$  sont des  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0,1]}$  martingales.
- f) Le processus  $(\int_0^t f(s) dB_s)_{t \in [0,1]}$  est un processus vérifiant la propriété de Markov.

Lorsque  $f$  est régulière le résultat suivant nous assure que l'intégrale de Wiener est définie  $\omega$  par  $\omega$ .

**Proposition 1.3.10** *Si  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ , alors,  $\forall 1 \geq t \geq 0$ ,*

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t) B_t - \int_0^t f'(s) B_s ds.$$

**Preuve :** On utilise la relation (1.4) et l'identité suivante

$$\int_0^t f(s) \chi_n(s) ds = - \int_0^t \left( \int_s^t f'(u) du \right) \chi_n(s) ds + f(t) \int_0^t \chi_n(s) ds$$

en justifiant la convergence de chaque terme (exercice).  $\square$

**Remarque 1.3.4** Cette construction élégante de l'intégrale de Wiener possède un défaut principal. En effet, on ne voit pas apparaître clairement quelles sont les propriétés du M.B qui la rende possible. Nous verrons dans les chapitres suivants que l'orthogonalité des accroissements joue un rôle essentiel qui est passé sous silence ici (on peut en effet construire l'intégrale de Wiener par rapport à tout processus du second ordre à accroissements orthogonaux cf [3]). De plus l'indépendance des accroissements Browniens va nous permettre (cf le chapitre concernant la construction de l'intégrale stochastique) d'intégrer non seulement des fonctions mais une large famille de processus.

**Exercice 1.3.2 Une version élémentaire de Fubini-stochastique**

Soit  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, le but de l'exercice est de justifier l'égalité suivante

$$\int_0^1 \int_0^1 f(s, t) dB_s dt = \int_0^1 \int_0^1 f(s, t) dt dB_s.$$

- a) Justifier que les intégrales ci-dessus ont bien un sens  
 b) En remarquant que

$$\int_0^1 \left( \sum_{n=0}^N \int_0^1 f(s, t) \chi_n(s) ds g_n \right) dt = \sum_{n=0}^N \int_0^1 \left( \int_0^1 f(s, t) dt \right) \chi_n(s) ds g_n$$

et en justifiant le passage à la limite, conclure.

**Cas où l'intégrand est de la forme  $f(B_t)$**

La proposition suivante propose une définition de l'intégrale stochastique pour des intégrands particuliers. Notons que l'esprit de cette construction est très proche de la construction de l'intégrale de Lebesgue par somme de Riemann.

**Proposition 1.3.11** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable à dérivée bornée. Alors, la série

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{ti}{n}}) (B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}}) \quad (1.5)$$

converge dans  $L^2$  et on note  $\int_0^t f(B_s) dB_s$  sa limite (qui ne suit pas en général une loi normale).

**Preuve :** La preuve de cette proposition sera donnée dans la suite du cours.  $\square$

**Remarque 1.3.5** Lorsque  $f$  est une fonction régulière, le théorème de Riemann nous assure que  $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_n^i) (\frac{t(i+1)}{n} - \frac{ti}{n})$  converge vers  $\int_0^t f(s) ds$  si  $x_n^i \in [\frac{ti}{n}, \frac{t(i+1)}{n}]$ .

On a donc le choix de la position du point  $x_n^i$  dans l'intervalle  $[\frac{ti}{n}, \frac{t(i+1)}{n}]$ . En ce qui concerne l'intégrale stochastique définie ci-dessus, cette propriété n'est plus vérifiée. Le choix de  $f(B_{\frac{ti}{n}})$  n'est pas anodin (cette variable est notamment indépendante de l'incrément  $(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})$ ). D'autres choix conduisent à d'autres intégrales. Par exemple en prenant  $f\left(\frac{B_{\frac{t(i+1)}{n}} + B_{\frac{ti}{n}}}{2}\right)$  on construit l'intégrale dite de Stratonovitch dont le comportement est très différent. Attardons nous un instant sur ce dernier point. Lorsque  $f = Id$  l'intégrale de Stratonovitch définie comme étant la limite de  $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(B_{\frac{t(i+1)}{n}} + B_{\frac{ti}{n}})(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})$  vaut  $\frac{B_t^2}{2}$ . D'après l'exercice ci-dessous, celle-ci est différente de  $\int_0^t B_s dB_s$ . Il s'agit là d'une différence fondamentale entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale stochastique.

### Commentaires

Considérons un processus stochastique  $(G_t)$  dont les trajectoires sont de classe  $C^1$  et  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ , les règles du calcul différentiel classique nous assure que

$$F(G_t) = F(G_0) + \int_0^t F'(G_s)G'_s ds.$$

Ce résultat peut de plus s'étendre sans peine aux cas d'un processus continu dont les trajectoires sont à variations finies. Le Brownien n'étant pas à variations finies (corollaire 1.3.2) la formule précédente ne s'applique pas *a priori*. C'est ce que nous voyons sur l'exemple suivant :

**Exemple 1.3.1** On se propose de calculer  $\int_0^t B_s dB_s$ . Nous devons ainsi évaluer la limite dans  $L^2$  de  $\sum_{i=0}^{n-1} B_{\frac{ti}{n}}(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})$ . Or

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} B_{\frac{ti}{n}}(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}}) = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{\frac{t(i+1)}{n}}^2 - B_{\frac{ti}{n}}^2) - \sum_{i=0}^{n-1} (B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2$$

donc

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} B_{\frac{ti}{n}}(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}}) = B_t^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2.$$

D'après la proposition 1.3.6, le dernier terme converge vers  $t$  dans  $L^2$ , ainsi

$$2 \int_0^t B_s dB_s = B_t^2 - t.$$

### 1.3.8 Formule d'Itô pour le M.B

**Proposition 1.3.12** Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  à dérivée seconde bornée, alors,  $\forall t \in [0, 1]$ ,

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds \quad P - ps.$$

La notation différentielle de cette égalité est

$$df(B_s) = f'(B_s)dB_s + f''(B_s)ds.$$

**Preuve :** D'après la définition proposée dans la proposition 1.3.11,

$$\int_0^t f'(B_s)dB_s = \lim_{L^2} Z_n = \lim_{L^2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{ti}{n}})(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}}).$$

Par ailleurs,

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(B_{\frac{t(i+1)}{n}}) - f(B_{\frac{ti}{n}}))$$

et, d'après le théorème concernant les sommes de Riemann,

$$\int_0^t f''(B_s)ds = \lim_{ps \text{ et } L^2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{\frac{ti}{n}}) \left( \frac{t(i+1)}{n} - \frac{ti}{n} \right). \quad (1.6)$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 et la continuité de la trajectoire

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(B_{\frac{t(i+1)}{n}}) - f(B_{\frac{ti}{n}}))$$

avec

$$f(B_{\frac{t(i+1)}{n}}) - f(B_{\frac{ti}{n}}) = f'(B_{\frac{ti}{n}})(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}}) + \frac{1}{2} f''(B_{\alpha_i})(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2$$

où  $\alpha_i$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $]\frac{ti}{n}, \frac{t(i+1)}{n}[$ .

Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{L^1} \sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{\alpha_i})(B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2 = \int_0^t f''(B_s)ds$$

pour conclure par unicité des limites dans  $L^1$  (on rappelle que la convergence dans  $L^2$  implique celle dans  $L^1$ ). Ceci se montre en deux temps.

Tout d'abord d'après l'inégalité de Schwartz

$$E \left[ \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left( f''(B_{\alpha_i}) - f''(B_{\frac{ti}{n}}) \right) (B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2 \right| \right] \leq U_n V_n$$

avec

$$U_n = E \left[ \sup_i \left| f''(B_{\alpha_i}) - f''(B_{\frac{ti}{n}}) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$V_n = E \left[ \left| \sum_{i=0}^{n-1} (B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2 \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

D'après la proposition 1.3.6,  $V_n \rightarrow t$ . De plus,  $U_n \rightarrow 0$  par convergence dominée car la fonction  $s \rightarrow f''(B_s)$  est presque sûrement uniformément continue sur  $[0, 1]$  avec  $f''$  bornée.

Enfin en utilisant les propriétés des accroissements du M.B et en posant

$$W_n = E \left[ \left| \sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{\frac{ti}{n}}) \left( (B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2 - \left( \frac{t(i+1)}{n} - \frac{ti}{n} \right) \right) \right|^2 \right]$$

on a

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1} E \left[ \left| f''(B_{\frac{ti}{n}}) \left( (B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2 - \left( \frac{t(i+1)}{n} - \frac{ti}{n} \right) \right) \right|^2 \right].$$

Ainsi

$$W_n \leq \|f''\|_{\infty}^2 \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}((B_{\frac{t(i+1)}{n}} - B_{\frac{ti}{n}})^2) = 2\|f''\|_{\infty}^2 \frac{t^2}{n} \rightarrow 0.$$

D'après (1.6) le résultat en découle.  $\square$

**Exercice 1.3.3** (*difficile...*) Soit  $f \in C^2(\mathbb{R})$  telle que

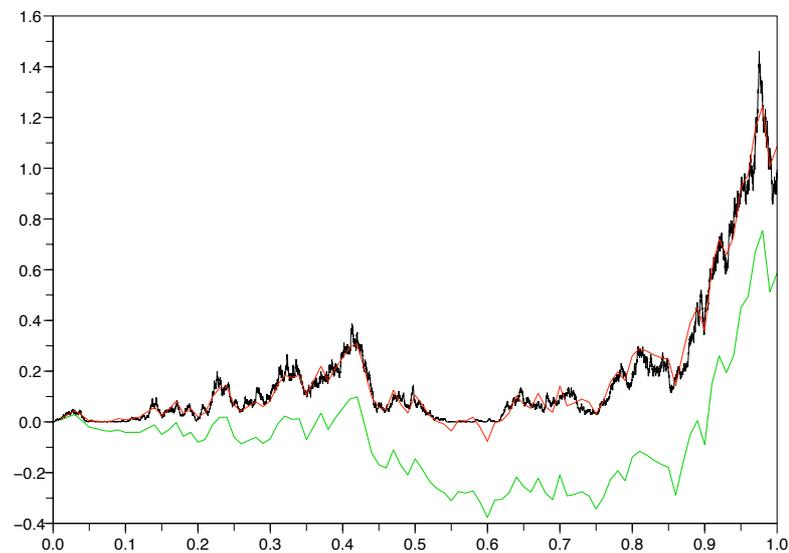
$$E \left[ \int_0^T (f'(B_s))^2 ds \right] < +\infty. \quad (*)$$

Montrer que  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \quad P - ps.$$

(On pourra admettre que sous la condition (\*) la proposition 1.3.11 reste valide mais avec de la convergence en probabilité et non  $L^2$ .) On pourra noter que cette nouvelle condition est beaucoup souple et permet notamment d'appliquer la formule d'Itô avec pour fonction  $f$  l'exponentielle.

Le graphique suivant illustre de manière numérique, la nécessité d'un calcul différentiel spécifique pour le M.B. En noir est représenté une trajectoire de  $B_t^2$  (simulé à l'aide de la méthode issue du théorème de Donsker), en noir une trajectoire de  $2 \int_0^t B_s dB_s$  (simulée en revenant à la définition de la proposition 1.3.11) et en rouge une trajectoire de  $2 \int_0^t B_s dB_s + t$ . On observe donc la nécessité du terme correctif.



### 1.3.9 Applications de l'intégrale de Wiener

#### Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Nous avons introduit au début de ce chapitre le M.B comme un modèle du mouvement d'une particule soumise à des chocs aléatoires dus à l'agitation thermique d'un fluide. Nous avons vu également que le fait de négliger la masse de la particule (pas d'inertie) entraîne la non dérivabilité des trajectoires ce qui n'est pas très satisfaisant. Le modèle suivant, plus proche de la réalité a été proposé par Langevin ([10]).

Une particule de masse  $m$ , animée d'une vitesse  $V(t)$  est soumise à deux forces :

a) Une force de frottement due à la viscosité du fluide  $f = -kV$  (où  $k$  est une constante positive liée au rayon de la particule),

b) Une force complémentaire  $\eta$  synthétisant la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide environnantes et décrite par Langevin : « elle est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule que, sans elle, la résistance visqueuse finirait par arrêter » .

Dans ce cas le principe fondamental de la dynamique assure que

$$mdV(t) = -kV(t)dt + \eta(t)dt. \quad (1.7)$$

Le terme  $\eta(t)dt$  représente donc la variation de quantité de mouvement  $dM(t)$  entre  $t$  et  $t + dt$ . En supposant que

- a)  $dM(t) = M(t + dt) - M(t)$  est indépendant de  $\sigma(M_s; s \leq t)$ .
- b) La loi de  $dM(t)$  ne dépend pas de  $t$ .
- c)  $t \rightarrow M(t)$  est continue.

De plus, en supposant (cf citation) que  $E[M(t)] = 0$ , on peut poser  $M(t) = \sigma B_t$ .

L'équation (1.7) devenant

$$mdV(t) = -kV(t)dt + \sigma dB_t. \quad (1.8)$$

On a alors la définition suivante :

**Définition 1.3.3** *Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la solution de l'équation suivante*

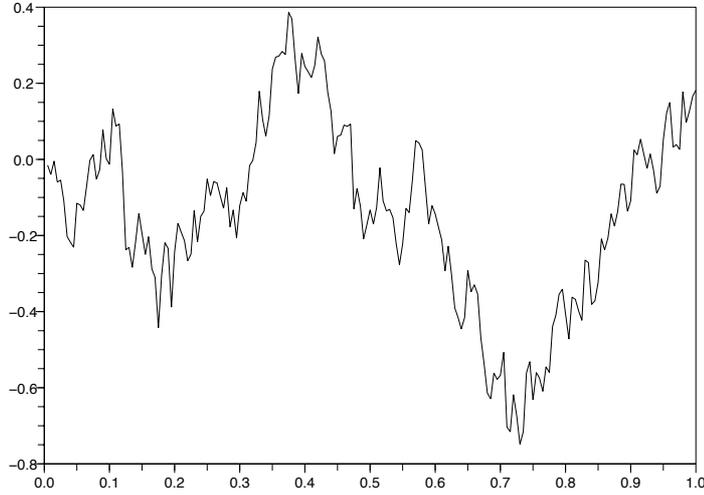
$$X_t = X_0 - a \int_0^t X_s ds + \sigma B_t \quad (1.9)$$

où  $(a, \sigma) \in \mathbb{R}^2$  et  $X_0$  est une variable aléatoire indépendante du M.B.

**Proposition 1.3.13** *L'équation (1.9) a pour unique solution le processus continu*

$$X_t = e^{-ta} \left( X_0 + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s \right). \quad (1.10)$$

La figure suivante représente une simulation sous scilab d'une trajectoire du processus  $X_t$  avec  $a = \sigma = 1$  et  $X_0 = 0$ .



**Preuve de la proposition 1.3.13 :** D'après la proposition 1.3.10,

$$X_t = e^{-ta} \left( X_0 + \sigma e^{at} B_t - \sigma a \int_0^t e^{as} B_s ds \right).$$

En employant une version stochastique de Fubini (exercice 1.3.1) on a

$$a \int_0^t X_s ds = aX_0 \int_0^t e^{-as} ds + a\sigma \int_0^t B_s ds - a^2\sigma \int_0^t e^{-as} \left( \int_0^s e^{au} B_u du \right) ds.$$

Un rapide calcul donne alors

$$a \int_0^t X_s ds = X_0 - X_t + \sigma B_t,$$

ce qui prouve l'existence. Pour ce qui est de l'unicité, si  $X_1$  et  $X_2$  sont toutes deux solutions de (1.9), alors le processus  $Z = X_1 - X_2$  vérifie l'équation intégrale suivante

$$Z_t = -a \int_0^t Z_s ds$$

dont l'unique solution est d'après le lemme suivant la solution nulle.

**Lemme 1.3.1 (Gronwall)** Soient  $T \in \mathbb{R}^+$ ,  $K \in \mathbb{R}^+$ ,  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tels que  $\forall t \in [0, T]$

$$\phi(t) \leq K + \int_0^t \phi(s)\psi(s)ds < \infty$$

et

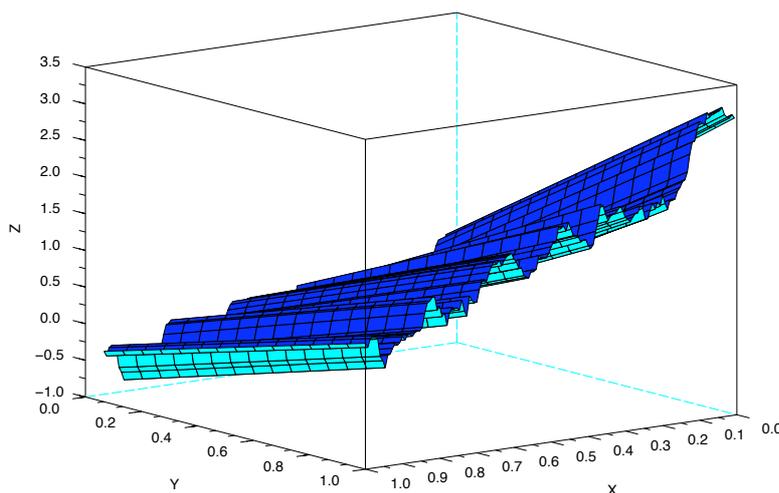
$$\int_0^T \psi(s) ds < \infty.$$

Alors,

$$\phi(t) \leq K e^{\int_0^t \psi(s) ds}.$$

□

La figure suivante est une simulation scilab du flot du processus d'O.U c'est à dire de l'application  $x_0 \in [0, 1] \rightarrow (X_t^{x_0}(\omega))_{t \in [0,1]}$  où  $\omega$  est fixé et où  $X^{x_0}$  est le processus d'O.U de condition initiale  $x_0 \in [0, 1]$ .



Dans le cas où la condition initiale est gaussienne, nous avons la proposition suivante qui est une conséquence immédiate de la proposition 1.3.9.

**Proposition 1.3.14** *Supposons  $X_0 \sim \mathcal{N}(m, \sigma_0^2)$  indépendante du M.B, alors,  $(X_t)$  est un processus gaussien de fonction d'espérance*

$$E[X_t] = m e^{-at}$$

et de fonction de covariance

$$\text{cov}(X_s, X_t) = e^{-a(t+s)} \left( \sigma_0 + \frac{\sigma^2}{2a} (e^{2a \inf(s,t)} - 1) \right).$$

### Le processus de Vasicek

Le processus de Vasicek est une variante du processus d'O.U où un coefficient de dérive constant à été ajouté. Il intervient de manière pratique dans la modélisation des courbes de taux courts en finance (cf. [11]). Le but n'est pas ici de présenter les principes de base de cette modélisation mais de familiariser le lecteur aux calculs sous-jacents.

Soit  $Y_t$  le processus vérifiant

$$dY_t = a(b - Y_t)dt + \sigma dB_t.$$

On remarque aisément que le processus  $X_t = Y_t - b$  vérifie l'équation (1.9) Ainsi,

$$Y_t = e^{-ta} (Y_0 - b) + b + \sigma \int_0^t e^{-(at-s)} dB_s.$$

Nous avons alors l'analogie de la proposition 1.3.14 : si  $Y_0 \sim \mathcal{N}(m, \sigma_0^2)$  est indépendante du M.B,  $Y$  est un processus gaussien de fonction d'espérance

$$E[X_t] = me^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

et de fonction de covariance

$$\text{cov}(Y_s, Y_t) = e^{-a(t+s)} \left( \sigma_0^2 + \frac{\sigma^2}{2a} (e^{2a \inf(s,t)} - 1) \right).$$

#### Exercice 1.3.4 Calcul du prix d'un zéro coupon

Le But de l'exercice est de calculer  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,

$$P(t, T) = E \left[ e^{\int_t^T Y_u du} | \mathcal{F}_t^B \right].$$

On considère que  $Y_0 \sim \mathcal{N}(m, \sigma_0^2)$  et est indépendante du M.B.

a) En utilisant l'exercice 1.3.1, montrer que

$$Z_t := \int_0^t Y_u du = \frac{1}{a} \left( b(at - 1 - e^{-at}) + Y_0(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t (1 - e^{-a(t-u)}) dB_u \right).$$

b) En utilisant la proposition 0.4.3, calculer  $E[e^{iu(Z_t - Z_s)}]$  pour  $0 \leq s \leq t \leq T$  et  $u \in \mathbb{R}$ .

c) En déduire que conditionnellement à  $\mathcal{F}_t^B$ ,  $Z_t - Z_s \sim \mathcal{N}(M(s, t), V(s, t))$  avec

$$M(s, t) = b(t - s) + a^{-1}(Y_s - b)(1 - e^{-a(t-s)})$$

et

$$V(s, t) = \frac{\sigma_0^2}{a^2}(1 - e^{-a(t-s)})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2} \left( (t - s) + \frac{(1 - e^{-2a(t-s)})}{2a} - \frac{2(1 - e^{-a(t-s)})}{a} \right).$$

d) Montrer que

$$P(t, T) = e^{-M(t, T) + \frac{1}{2}V(t, T)}.$$

# Bibliographie

- [1] P. BILLINGSLEY : *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968.
- [2] L. BACHELIER : *Théorie de la spéculation (Thèse)*, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, tome 17, pp 21-86, Paris, Gauthier-Villars, 1900. Réédité par Jacques Gabay, 1984, ISBN 2876471299.
- [3] N. BOULEAU : *Processus stochastiques et applications*, Hermann, 1988.
- [4] M. BRIANE, G. PAGÈS : *Théorie de l'intégration*, Vuibert, 2006.
- [5] D. DACUNHA-CASTELLE, M. DUFLO : *Probabilités et statistiques 2*, Masson, 1993.
- [6] A. EINSTEIN : *Mouvement des particules en suspension dans un fluide au repos, comme conséquence de la théorie cinétique moléculaire de la chaleur*, Oeuvres choisies : tome 1, Quanta, textes choisis par F. Balibar, O. Darrigol et B. Jech, Éditions du Seuil/Éditions du CNRS, 1989.
- [7] X. FERNIQUE : *Continuité des processus gaussiens*, Séminaire Fortet, 1965, non publié.
- [8] A. M. GARSIA, E. RODEMICH, H. RUMSEY, JR : *A real variable lemma and the continuity of paths of some gaussian processes*, Indiana Univ. Math. J., vol 20, 565-578, 1970.
- [9] J. P. KAHANE : *Le mouvement Brownien : un essai sur les origines de la théorie mathématique*, (disponible en ligne à l'adresse "[http://www.emis.de/journals/SC/1998/3/pdf/smf\\_sem-cong\\_3\\_123-155.pdf](http://www.emis.de/journals/SC/1998/3/pdf/smf_sem-cong_3_123-155.pdf)").
- [10] P. LANGEVIN : *Sur la théorie du mouvement brownien*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences 146 (1908), 530-532.
- [11] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Second edition, Ellipses, Paris, 1997.
- [12] P. LÉVY : *Processus stochastiques et mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948, 2<sup>e</sup>me édition, 1965.
- [13] R.E.A.C. PALEY, N. WIENER : *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 17, New-York, 1934.

- [14] P. PRIOURET : *Introduction aux processus de diffusion*, Cours DEA Paris 6 disponible en ligne à l'adresse "<http://www.proba.jussieu.fr/cours/dea/priouret.dea.pdf>".
- [15] D. REVUZ, M. YOR : *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer, 3ème édition, 1999.
- [16] N. WIENER : *Differential space*, J. Math. Phys., 2, 131-174, 1923.

## Chapitre 2

# L'intégrale stochastique, les processus d'Itô.

Dans toute cette partie  $(B_t)_{t \in [0, T]}$  est un M.B standard défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Cette espace de probabilité est de plus équipé de la filtration naturelle du M.B  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$ .

Le but est ici de généraliser la construction de l'intégrale de Wiener lorsque l'intégrand est un processus stochastique de carré intégrable régulier. Les remarquables propriétés du mouvement Brownien vont nous permettre très simplement de construire cette intégrale stochastique sur  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  et de l'étendre, grâce à une propriété d'isométrie, à  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ . Notons que le prix à payer pour cette construction est de pouvoir uniquement intégrer des processus n'anticipant pas sur le Brownien ce qui est suffisant pour les applications financières élémentaires.

### 2.1 Intégrale stochastique sur $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$

On se donne

$$X_t = \sum_{i=1}^{n-1} F_{t_i} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t) \quad (2.1)$$

dans  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  (notons qu'alors  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$  et  $F_{t_i} \in L^2(\mathcal{F}_{t_i})$ ).

#### 2.1.1 Définition

**Définition 2.1.1** *On pose*

$$\int_0^T X_s dB_s = \sum_{i=1}^{n-1} F_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

**Remarque 2.1.1** Lorsque  $0 \leq t \leq T$  on définit naturellement

$$\int_0^t X_s dB_s = \int_0^T X_s 1_{[0,t]}(s) dB_s = \sum_{i=1}^{n-1} F_{t_i} (B_{(t_{i+1} \wedge t)} - B_{(t_i \wedge t)}). \quad (2.2)$$

Bien entendu, lorsque  $X$  est une fonction en escalier ( $F_{t_i}$  est alors constante) cette définition coïncide avec celle de l'intégrale de Wiener (cf. (1.4)). Cependant, il est important de noter qu'en général le processus  $\int_0^t X_s dB_s$  n'a aucune raison d'être gaussien.

## 2.1.2 Propriétés

**Proposition 2.1.1** Sur l'ensemble  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :

- a)  $X \mapsto \int_0^t X_s dB_s$  est linéaire.
- b) Le processus  $(\int_0^t X_s dB_s)_{t \in [0, T]}$  est à trajectoires continues.
- c) Le processus  $(\int_0^t X_s dB_s)_{t \in [0, T]}$  est adapté à  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$ .
- d)  $E \left[ \int_0^t X_s dB_s \right] = 0$  et  $\text{Var} \left( \int_0^t X_s dB_s \right) = E \left[ \int_0^t X_s^2 ds \right]$ .
- e) On a pour  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$E \left[ \int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s^B \right] = 0 \quad \text{et} \quad E \left[ \left( \int_s^t X_u dB_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s^B \right] = E \left[ \int_s^t X_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s^B \right]. \quad (2.3)$$

f) Le processus  $(\int_0^t X_s dB_s)_{t \in [0, T]}$  est une  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$  martingale continue de carré intégrable, de plus,

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t X_s dB_s \right|^2 \right] \leq 4E \left[ \int_0^T X_u^2 du \right]. \quad (2.4)$$

**Preuve de la proposition :** le point a) est évident, les points b) et c) se déduisent immédiatement de (2.2) et le point d) du point e) (en prenant  $s = 0$ ). Démontrons e) : Nous supposons sans perte de généralités (quitte à rajouter deux points à la subdivision) que  $s = t_j$  et  $t = t_k$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
E \left[ \int_0^t X_u dB_u | \mathcal{F}_s^B \right] &= E \left[ \sum_{i=1}^{k-1} F_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_j}^B \right] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} E \left[ F_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_j}^B \right] + \sum_{i=j}^{k-1} E \left[ F_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_j}^B \right] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} F_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sum_{i=j}^{k-1} E \left[ F_{t_i} E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}^B \right] | \mathcal{F}_{t_j}^B \right] \\
&= \int_0^s X_u dB_u + 0.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième partie le calcul se fait dans le même esprit.

$$\begin{aligned}
E \left[ \left( \int_s^t X_u dB_u \right)^2 | \mathcal{F}_s^B \right] &= E \left[ \left( \sum_{i=j}^{k-1} F_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right)^2 | \mathcal{F}_{t_j}^B \right] \\
&= \sum_{i=j}^{k-1} E \left[ F_{t_i}^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_j}^B \right] + 2 \sum_{j \leq i < l \leq k-1} E \left[ F_{t_i} F_{t_l} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) | \mathcal{F}_{t_j}^B \right]
\end{aligned}$$

En utilisant pour la première somme le fait que  $E[\cdot | \mathcal{F}_{t_j}^B] = E[E[\cdot | \mathcal{F}_{t_i}^B] | \mathcal{F}_{t_j}^B]$  et pour la seconde que  $E[\cdot | \mathcal{F}_{t_j}^B] = E[E[\cdot | \mathcal{F}_{t_i}^B] | \mathcal{F}_{t_j}^B]$ , on obtient

$$\begin{aligned}
E \left[ \left( \int_s^t X_u dB_u \right)^2 | \mathcal{F}_s^B \right] &= \sum_{i=j}^{k-1} E \left[ F_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i) | \mathcal{F}_{t_j}^B \right] + 0 \\
&= E \left[ \int_s^t X_u^2 du | \mathcal{F}_s^B \right].
\end{aligned}$$

Le point f) est une conséquence de e) et du théorème 0.5.3.  $\square$

**Exercice 2.1.1** a) Montrer que pour  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  et  $v, t \geq s$  on a

$$E \left[ \left( \int_s^t X_u dB_u \right) \left( \int_s^v Y_u dB_u \right) | \mathcal{F}_s^B \right] = E \left[ \int_s^{t \wedge v} X_u Y_u du | \mathcal{F}_s^B \right].$$

b) Montrer que le processus  $\left( \int_0^t X_u dB_u \right)^2 - \int_0^t X_u^2 du$  est une  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$  martingale.

**Remarque 2.1.2** La propriété d) dont on tire

$$\text{Var} \left( \int_0^T X_s dB_s \right) = E \left[ \left( \int_0^T X_u dB_u \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^T X_s^2 ds \right] \quad (2.5)$$

est fondamentale. Elle traduit le fait que l'application  $X \mapsto \int_0^T X_s dB_s$  est une **isométrie** de  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  sur l'espace des martingales sur  $[0, T]$ , continues et de carré intégrable (espace que l'on notera dorénavant  $M^2([0, T])$ ), ces espaces étant munis de leur norme naturelle (voir chapitre 0).

## 2.2 Extension à $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$

Par un argument classique que nous allons néanmoins détailler (prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace complet) il est possible de prolonger l'intégrale définie dans le paragraphe précédent au cas des intégrands dans  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ .

Nous rappelons que le théorème 0.5.2 nous assure **la densité** de  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  dans  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ .

**Proposition 2.2.1** *Soit  $X \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ . Si  $\Phi_n$  et  $\Phi'_n$  sont deux suites dans  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  qui convergent vers  $X$  dans  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  alors*

$$\lim_{M^2([0, T])} \int_0^\cdot \Phi_n(\cdot, s) dB_s = \lim_{M^2([0, T])} \int_0^\cdot \Phi'_n(\cdot, s) dB_s.$$

**Preuve :** Deux choses sont à démontrer. Tout d'abord si  $\Phi_n$  converge dans  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  on veut la convergence de  $\int_0^\cdot \Phi_n(\cdot, s) dB_s$  dans  $M^2([0, T])$ . Comme  $M^2([0, T])$  est complet (proposition 0.5.6), il suffit de démontrer que  $\int_0^\cdot \Phi_n(\cdot, s) dB_s$  est de Cauchy dans  $M^2([0, T])$  ce qui est une simple conséquence de (2.5). Pour montrer que la limite est indépendante de la suite approximante on utilise une nouvelle fois (2.5).  $\square$

On a comme conséquence de la proposition précédente une définition non ambiguë de l'intégrale stochastique pour  $X \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ .

**Définition 2.2.1** *Si  $X \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  et si  $\Phi_n$  est une suite dans  $\mathcal{E}([0, T] \times \Omega)$  qui converge vers  $X$  dans  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ , on note  $(\int_0^\cdot X_s dB_s)$  la limite de  $(\int_0^\cdot \Phi_n(\cdot, s) dB_s)$  dans  $M^2([0, T])$*

**Remarque 2.2.1** *Le fait d'avoir défini  $(\int_0^\cdot X_s dB_s)$  globalement (plutôt que  $t$  par  $t$ ) permet d'obtenir directement la continuité et le caractère martingale du processus limite. Notons au passage que cette intégrale est définie à modification près.*

Un bon entraînement est de démontrer que nous avons l'analogie de la proposition 2.1.1.

**Proposition 2.2.2** *Sur l'ensemble  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :*

a)  $X \mapsto \int_0^t X_s dB_s$  est linéaire.

b) Le processus  $(\int_0^t X_s dB_s)_{t \in [0, T]}$  est à trajectoires continues.

c) Le processus  $(\int_0^t X_s dB_s)_{t \in [0, T]}$  est adapté à  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$ .

d)  $E \left[ \int_0^t X_s dB_s \right] = 0$  et  $Var \left( \int_0^t X_s dB_s \right) = E \left[ \int_0^t X_s^2 ds \right]$ .

e) On a pour  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$E \left[ \int_s^t X_u dB_u | \mathcal{F}_s^B \right] = 0 \quad \text{et} \quad E \left[ \left( \int_s^t X_u dB_u \right)^2 | \mathcal{F}_s^B \right] = E \left[ \int_s^t X_u^2 du | \mathcal{F}_s^B \right]. \quad (2.6)$$

f) Le processus  $(\int_0^t X_s dB_s)_{t \in [0, T]}$  est une  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$  martingale continue de carré intégrable, de plus,

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t X_s dB_s \right|^2 \right] \leq 4E \left[ \int_0^T X_u^2 du \right]. \quad (2.7)$$

**Remarque 2.2.2** L'intégrale stochastique coïncide avec l'intégrale de Wiener et avec l'intégrale définie à la proposition 1.3.11 (ou à l'exercice 1.3.3 mais c'est plus dur...). En effet, dans le cadre de la proposition 1.3.11, il suffit de montrer que le processus  $Z_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{T_i}{n}}) 1_{\left] \frac{T_i}{n}, \frac{T_{(i+1)} \right]}$  converge vers  $f(B)$  dans  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ .  
Or

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T (f(B_s) - Z_n(s))^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} &= E \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{T_i}{n}}^{\frac{T_{(i+1)}}{n}} \left( f(B_s) - f(B_{\frac{T_i}{n}}) \right)^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f'\|_{\infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{T_i}{n}}^{\frac{T_{(i+1)}}{n}} (s - \frac{T_i}{n}) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{T \|f'\|_{\infty}}{\sqrt{2n}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim \int_0^{\cdot} Z_n(\cdot, s) dB_s \underset{M^2([0, T])}{=} \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{T_i}{n}}) (B_{\frac{T_{(i+1)}}{n} \wedge \cdot} - B_{\frac{T_i}{n} \wedge \cdot}) \underset{M^2([0, T])}{=} \int_0^{\cdot} \Phi_n(\cdot, s) dB_s.$$

## 2.3 Processus d'Itô

**Définition 2.3.1** *Un processus d'Itô est un processus adapté et continu sur  $[0, T]$  de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s \quad (2.8)$$

où  $\phi$  et  $\psi$  appartiennent à  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  et  $X_0 \in L^2(\mathcal{F}_0)$ . On adoptera souvent la notation différentielle suivante

$$dX_s = \psi_s ds + \phi_s dB_s.$$

**Proposition 2.3.1** *L'écriture (2.8) est unique (à modification près).*

**Preuve :** Il s'agit d'une application directe de la proposition 0.5.5.  $\square$

**Corollaire 2.3.1** *D'après la proposition 0.5.5, un processus d'Itô est une martingale ssi sa partie en  $ds$  ( $\psi$ ) est nulle.*

**Définition 2.3.2** *De manière très naturelle, on peut étendre la notion d'intégrale stochastique au cas des processus d'Itô. Si  $X$  est de la forme (2.8), alors, pour  $\theta \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  vérifiant  $\theta\psi \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  et  $\theta\phi \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ . On définit  $\int_0^t \theta_s dX_s$  par*

$$\int_0^t \theta_s dX_s = \int_0^t \theta_s \psi_s ds + \int_0^t \theta_s \phi_s dB_s. \quad (2.9)$$

Nous avons une formule de changement de variables pour les processus d'Itô dans l'esprit de la proposition 1.3.12. La démonstration est laissée au lecteur car les grandes lignes sont identiques à celles de la preuve effectuée dans le cas du Brownien.

**Proposition 2.3.2** *Soit  $X$  un processus d'Itô de la forme (2.8), si  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est à dérivées bornées alors,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \phi_s^2 ds. \quad (2.10)$$

**Remarque 2.3.1** *Le caractère borné des dérivées est très contraignant, il est imposé pour que les intégrales considérées aient un sens. Nous dirons quelques mots dans le prochain paragraphe concernant les extensions possibles de la formule d'Itô qui nécessitent une extension de la notion même d'intégrale d'Itô. Notons cependant que les conditions (dans l'esprit de l'exercice 1.3.3)  $f'(X)\psi \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ ,  $f'(X)\phi \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  et  $f''(X_s)\phi^2 \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  assure la validité de (2.10) sans hypothèses de bornitude sur  $f$  et ses dérivées.*

La formule d'Itô se généralise très simplement pour les fonctions dépendant du temps. Dans ce cas nous avons également l'analogie de la remarque précédente.

**Proposition 2.3.3** *Soit  $X$  un processus d'Itô de la forme (2.8), si  $f \in C^{(1,2)}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  est à dérivées bornées alors,*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \phi_s^2 ds + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds. \quad (2.11)$$

## 2.4 Calcul d'Itô étendu

La partie de ce cours concernant les martingales étant réduite à la portion congrue (absence de la notion de temps d'arrêt), les résultats présentés dans cette section vont être admis et seront au besoin utilisés (lorsque que les conditions d'intégrabilité des processus feront défaut). Nous renvoyons le lecteur à [3] pour les démonstrations correspondantes qui par leur caractère technique ne sont pas exactement dans l'esprit de ce cours.

**Les résultats suivants ayant des applications financières intéressantes sont à méditer.**

La condition  $X \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  imposée pour la construction de l'intégrale stochastique sera par moment trop contraignante. Elle peut cependant être relaxée de manière substantielle.

On définit les ensembles suivants

$$\mathcal{H}^2_{loc}(\Omega \times [0, T]) = \left\{ (X_t)_{t \in [0, T]} \text{ prog mes; } \int_0^T X_s^2 ds < \infty P - p.s \right\}$$

et

$$\mathcal{H}^1_{loc}(\Omega \times [0, T]) = \left\{ (X_t)_{t \in [0, T]} \text{ prog mes; } \int_0^T |X_s| ds < \infty P - p.s \right\}.$$

Notons que de manière évidente

$$L^2_{prog}(\Omega \times [0, T]) \subset \mathcal{H}^2_{loc}(\Omega \times [0, T]) \subset \mathcal{H}^1_{loc}(\Omega \times [0, T]).$$

**Proposition 2.4.1** *On peut étendre l'intégrale stochastique aux éléments de  $\mathcal{H}^2_{loc}(\Omega \times [0, T])$ . Dans ce cas, le processus  $\int_0^t X_s dB_s$  n'est **plus nécessairement une martingale** (en particulier  $E[\int_0^t X_s dB_s]$  peut être non nulle). Les propriétés a), b) et c) de la proposition 2.2.2 sont cependant conservées.*

**Remarque 2.4.1** *Le manque d'intégrabilité de l'intégrand va se traduire pour nous par un manque de régularité de l'intégrale stochastique correspondante. Le processus  $\int_0^t X_s dB_s$  est cependant connu dans la littérature sous le nom de martingale locale (ce n'est certes pas une martingale mais on en est pas très loin).*

On va définir également les processus d'Itô généralisés.

**Définition 2.4.1** *Un processus d'Itô (généralisé) est un processus adapté et continu sur  $[0, T]$  de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s \quad (2.12)$$

où  $\phi \in \mathcal{H}_{loc}^2(\Omega \times [0, T])$ ,  $\psi \in \mathcal{H}_{loc}^1(\Omega \times [0, T])$  et  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0^B$  mesurable. On adoptera souvent la notation différentielle suivante

$$dX_s = \psi_s ds + \phi_s dB_s.$$

**Proposition 2.4.2** *L'écriture (2.12) est unique au sens où*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s = X'_0 + \int_0^t \psi'_s ds + \int_0^t \phi'_s dB_s \quad (2.13)$$

implique

$$X_0 = X'_0 \quad P - p.s., \quad \psi = \psi' \quad dx \otimes P - p.s., \quad \phi = \phi' \quad dx \otimes P - p.s.$$

Nous avons également l'analogie du corollaire 2.3.1,

**Proposition 2.4.3** *Si  $(X_t)$  est une martingale de la forme 2.12 alors  $\psi = 0 \quad dx \otimes P - p.s.$*

La formule d'Itô possède elle aussi une extension dans ce nouveau cadre. Le fait d'avoir affaibli les conditions d'intégrabilité nous permet d'obtenir l'analogie de 2.10 pour des fonctions beaucoup moins régulières.

**Proposition 2.4.4** *Soit  $X$  un processus d'Itô de la forme (2.12), si  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , alors,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \phi_s^2 ds. \quad (2.14)$$

où

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) \psi_s ds + \int_0^t f'(X_s) \phi_s dB_s.$$

Si la fonction  $f$  dépend du temps, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 2.4.5** Soit  $X$  un processus d'Itô de la forme (2.12), si  $f \in C^{(1,2)}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , alors,

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \phi_s^2 ds + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds. \quad (2.15)$$

Enfin, lorsque la fonction n'est définie que sur un ouvert  $\Theta$  de  $\mathbb{R}$  (par exemple la fonction  $\log$ ) la formule d'Itô possède l'extension suivante :

**Proposition 2.4.6** Soit  $X$  un processus d'Itô de la forme (2.12) vérifiant  $\forall t \in [0, T], X_t \in \Theta$   $P$ -p.s. Si  $f \in C^2(\Theta, \mathbb{R})$ , alors,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \phi_s^2 ds. \quad (2.16)$$

où

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) \psi_s ds + \int_0^t f'(X_s) \phi_s dB_s.$$

**Exercice 2.4.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux processus d'Itô sur  $[0, T]$  de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \psi'_s ds + \int_0^t \phi'_s dB_s.$$

Montrer que

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t \phi_s \phi'_s ds. \quad (2.17)$$

(Hint : on pourra appliquer la formule d'Itô à  $(X_t + Y_t)^2$ ,  $X_t^2$  et  $Y_t^2$ .)

## 2.5 Equations différentielles stochastiques (EDS)

### 2.5.1 Le cas du Brownien géométrique

On rappelle (def 1.3.1) qu'un mouvement Brownien géométrique de drift  $b$  et de volatilité  $\sigma^2$  ( $(b, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ ) est le processus continu  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  défini par

$$S_t = x_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}. \quad (2.18)$$

On prendra ici  $x_0 > 0$  de sorte que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $X_t > 0$ . En appliquant la formule 2.15 avec  $f(t, x) = x_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma x}$  et  $X_t = B_t = \int_0^t dB_s$ , on obtient  $\forall t \in [0, T]$

$$S_t = f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t f'_s(s, B_s) ds + \int_0^t f'_x(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, B_s) ds$$

et donc

$$S_t = f(t, B_t) = x_0 + (b - \frac{1}{2}\sigma^2) \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t S_s ds.$$

En utilisant la notation différentielle le processus  $(S_t)$  vérifie l'équation

$$\underline{dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dB_t} \quad (2.19)$$

de condition initiale  $S_0 = x_0$ .

Cette équation, très célèbre en finance, est connue sous le nom d'équation de **Black et Scholes**

**Remarque 2.5.1** *D'après la proposition 1.3.1, lorsque  $b = 0$ , le processus  $S_t$  est une martingale. Ce type de processus porte alors le nom de martingale exponentielle.*

Concernant l'équation 2.19, la proposition suivante assure l'unicité de la solution.

**Proposition 2.5.1** *Pour  $(b, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ , il existe un unique (au sens de l'indistinguabilité) processus d'Itô  $(S_t)$  vérifiant*

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dB_t$$

(avec  $S_0 = x_0$ ). Ce processus est donné par 2.18.

**Preuve :** Soit  $(X_t)$  vérifiant  $X_0 = x_0$  et  $dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t$ . On pose

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = e^{(-b + \frac{1}{2}\sigma^2)t - \sigma B_t} = e^{(b' - \frac{1}{2}\sigma'^2)t + \sigma' B_t}$$

où  $\sigma' = -\sigma$  et  $b' = -b + \sigma^2$ . Ainsi, par analogie avec le calcul effectué précédemment,

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s (b' ds + \sigma' dB_s) = 1 + \int_0^t Z_s ((-b + \sigma^2) ds - \sigma dB_s).$$

D'après l'exercice 2.4.1, on déduit facilement que  $d(X_t Z_t) = 0$ . Ainsi,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$X_t = S_t P - p.p.$$

Le processus  $X_t$  est donc une modification de  $S_t$ . Les deux processus étant continus ils sont indistinguables.  $\square$

## 2.5.2 Le cas général

Nous renvoyons le lecteur à (par ordre croissant de difficulté) [6], [8] et [9] pour de plus amples détails concernant ce sujet.

On considère les équations de la forme générale suivante :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (2.20)$$

de condition initiale (C.I)  $X_0 = Z$ .

On définit en premier lieu la notion de solution d'une telle équation :

**Définition 2.5.1** *On se donne  $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Z \mathcal{F}_0^B$  mesurable. Trouver une solution à l'équation 2.20, revient à trouver un processus  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  continu et adapté vérifiant :*

a)  $\forall t \in [0, T]$ , les intégrales  $\int_0^t b(s, X_s)ds$  et  $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$  ont un sens i.e  $(\sigma(t, X_t))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{H}_{loc}^2(\Omega \times [0, T])$  et  $(b(t, X_t))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{H}_{loc}^1(\Omega \times [0, T])$ .

b)  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  vérifie 2.20.

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes de type lipschitz sur les fonctions  $b$  et  $\sigma$  pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation 2.20. Comme pour les équations différentielles ordinaires (EDO) elles ne sont pas nécessaires (voir [9]).

**Théorème 2.5.1** *Soient  $b$  et  $\sigma$  deux fonctions continues vérifiant  $\exists K > 0$  avec*

$$a) |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

$$b) |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|).$$

*Si  $E[Z^2] < \infty$ , l'équation 2.20 admet une unique solution  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  (au sens de l'indistinguabilité). Cette solution vérifie de plus la condition d'intégrabilité suivante :*

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right] < \infty.$$

**Idée de la preuve :** Comme souvent lorsque nous avons affaire à des équations différentielles (ordinaires ou stochastiques) la preuve de l'existence fait intervenir un argument de point fixe et celle de l'unicité un argument de type lemme de

Gronwall.

**Etape 1 : On travaille sur le bon espace :  $\mathcal{S}$**

On définit l'espace complet suivant :

$$\mathcal{S} = \{ (X_t)_{t \in [0, T]}; (X_t)_{t \in [0, T]} \text{ processus } C^0 \text{ et adapté tel que } E[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 ] < \infty \}$$

équipé de la norme définie par

$$\|X\|_{\mathcal{S}} = E[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 ]^{\frac{1}{2}}$$

**Etape 2 : On applique le théorème de point fixe de Picard pour T petit**

Soit  $F$  l'application qui à un processus  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  associe le processus  $(F(X)_t)_{t \in [0, T]}$  défini par

$$F(X)_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

**A)**  $F$  est bien définie

D'après la condition b), lorsque  $(X_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{S}$ , les processus  $(\sigma(t, X_t))_{t \in [0, T]}$  et  $(b(t, X_t))_{t \in [0, T]}$  sont dans  $L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$ . (Notons qu'alors le processus  $\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$  est une martingale de carré intégrable).

**B)**  $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

Comme  $(u + v)^2 \leq 2(u^2 + v^2)$ ,

$$|F(X)_t - F(0)_t|^2 \leq 2( \sup_{0 \leq t \leq T} | \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, 0)) ds |^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} | \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, 0)) dB_s |^2 )$$

or d'après a)

$$E[ \sup_{0 \leq t \leq T} | \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, 0)) ds |^2 ] \leq K^2 T^2 E[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 ]$$

et d'après 2.4 et a)

$$E[ \sup_{0 \leq t \leq T} | \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, 0)) dB_s |^2 ] \leq 4K^2 T E[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 ].$$

Ainsi

$$\|F(X)\|_{\mathcal{S}} \leq \sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)}\|X\|_{\mathcal{S}} + \|F(0)\|_{\mathcal{S}}.$$

De plus, en remarquant que  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ,

$$|F(0)_t|^2 \leq 3\left(Z^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t b(s, 0) ds \right|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, 0) dB_s \right|^2\right)$$

et donc d'après b) et 2.4

$$\|F(0)\|_{\mathcal{S}} \leq 3(E[Z^2] + K^2T^2 + 4K^2T) < \infty$$

ce qui entraîne le résultat car  $\|F(X)\|_{\mathcal{S}} < \infty$  donc  $X \in \mathcal{S}$ .

C) Par un calcul en tout point analogue à celui mené au B),

$$\|F(X) - F(Y)\|_{\mathcal{S}} \leq \sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)}\|X - Y\|_{\mathcal{S}},$$

l'application  $F$  est donc lipschitzienne de rapport  $\sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)}$ . Pour  $T$  suffisamment petit c'est même une contraction stricte!!!

D) Pour  $T = T_0$  petit,  $F$  admet donc un unique point fixe dans  $\mathcal{S}$ , ce point fixe est une solution de 2.20 sur  $[0, T_0]$ . La solution de 2.20 sur  $[0, T_0]$  est donc unique si on se restreint à  $\mathcal{S}$ .

**Etape 3 : Unicité de la solution de 2.20 sur  $[0, T_0]$**

On passe de l'unicité sur  $\mathcal{S}$  à l'unicité en général (sur  $[0, T_0]$ ) en utilisant un argument que nous admettrons (cf [5] pour une preuve de cette étape utilisant la notion de temps d'arrêt et le lemme de Gronwall).

**Etape 4 : Passage du local au global**

On passe de l'existence et de l'unicité sur  $[0, T_0]$  à celles sur  $[0, T]$  en travaillant successivement sur  $[0, T_0]$ ,  $[T_0, 2T_0]$ , .... et en recollant les résultats.  $\square$

### 2.5.3 Propriété de Markov des solutions

On note dans ce paragraphe  $(X_s^{t,x})_{s \geq t}$  la solution de l'équation (2.20) qui part de  $x$  à l'instant  $t$  soit

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x}) dB_u.$$

Les résultats suivants bien que donnés sans démonstration (voir par exemple ???) sont extrêmement importants et permettent dans certains cas un calcul relativement simple des espérances conditionnelles associées aux solutions d'une EDS.

**Proposition 2.5.2** *Sous les conditions du théorème 2.5.1 si  $s \geq t$ ,*

$$X_s^{0,x} = X_s^{t,X_t^{0,x}} \text{ P.p.p.} \quad (2.21)$$

**Proposition 2.5.3** *Sous les conditions du théorème 2.5.1, la solution de (2.20) est un processus de Markov au sens où pour toute fonction borélienne bornée  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $t \geq s$ ,*

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s^B] = \Phi(X_s) \text{ P.p.p.} \quad (2.22)$$

où  $\Phi(x) = E[f(X_t^{s,x})]$ . De plus, si les coefficients  $b$  et  $\sigma$  ne dépendent pas de  $t$  (on dit alors que l'équation est homogène)

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s^B] = \Psi(X_s) \text{ P.p.p.} \quad (2.23)$$

où  $\Psi(x) = E[f(X_{t-s}^{0,x})]$ .

## 2.5.4 Comment simuler une EDS (un premier pas)

De nombreuses EDS ne peuvent se résoudre explicitement. C'est pourquoi il est parfois commode de disposer de méthodes numériques d'approximation. Nous présentons ici brièvement la méthode la plus simple qui est un schéma d'approximation à l'ordre 1. Notons que les méthodes pour les EDS sont directement issues de celles utilisées pour les EDO (voir [1], [4] et [2]).

### Schéma d'Euler aléatoire

On se limite ici au cas homogène en considérant la solution  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  de l'équation

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

avec (C.I)  $X_0 = x$ .

On considère la subdivision d'ordre  $N \in \mathbb{N}^*$  de l'intervalle  $[0, T]$  et on pose  $\forall i \in \{0, \dots, N\}$ ,  $t_i^N = \frac{iT}{N}$ . La méthode d'Euler consiste à considérer le schéma récursif suivant,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$X^N(t_i^N) = X^N(t_{i-1}^N) + b(X^N(t_{i-1}^N))\frac{T}{N} + \sigma(X^N(t_{i-1}^N))(B_{t_i^N} - B_{t_{i-1}^N}) \quad (2.24)$$

avec  $X^N(0) = x$ , défini aux points de la forme  $t_i^N$ . On note  $X^N$  le processus sur  $[0, T]$  qui est l'interpolation linéaire par morceaux des points de la forme  $(t_i^N, X^N(t_i^N))$ . On peut montrer (cf [2]) le résultat suivant :

**Proposition 2.5.4** *Dans les conditions du théorème 2.5.2,*

$$E[ \sup_{t \in [0, T]} (X_t^N - X_t)^2 ] \leq K \frac{T}{N}$$

où  $K$  ne dépend que de  $T$ .

D'un point de vue algorithmique, la formule (2.24) est très pratique car elle nécessite uniquement de simuler un échantillon  $(g_i)$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et de substituer  $\sqrt{\frac{T}{N}}g_i$  à  $B_{t_i^N} - B_{t_{i-1}^N}$ .



# Bibliographie

- [1] N. BOULEAU, D. TALAY : *Probabilités numériques*, INRIA, 1992.
- [2] T. GARD : *Introduction to Stochastic Differential equations*, Marcel Dekker, 1988.
- [3] I. KARATZAS, S. SHREVE : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, New York, 1988
- [4] H.J KUSHNER : *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1977.
- [5] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Second edition, Ellipses, Paris, 1997.
- [6] B. OKSENDAL : *Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1998.
- [7] P. PRIOURET : *Introduction aux processus de diffusion*, Cours DEA Paris 6 disponible en ligne à l'adresse "<http://www.proba.jussieu.fr/cours/dea/priouret.dea.pdf>".
- [8] D. REVUZ, M. YOR : *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer, 3ème edition, 1999.
- [9] L.C.G ROGERS, D. WILLIAMS : *Diffusions, Markov processes and Martingales, Vol 1. Foundations*, Springer, Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2000.



# Chapitre 3

## Deux résultats importants

Dans toute cette partie  $(B_t)_{t \in [0, T]}$  est un M.B standard défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Cette espace de probabilité est de plus équipé de la filtration naturelle du M.B  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$ . On notera  $E$  l'espérance sous  $P$ .

### 3.1 Théorème de Girsanov

**Rappel :** Nous avons démontré (ex 0.6.1) que si une variable aléatoire  $X$  suit, sous une probabilité  $P$ , une  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  alors, sous la probabilité  $Q$  (équivalente à  $P$ ) ayant pour densité par rapport à  $P$

$$L = e^{-\frac{mX}{\sigma^2}} e^{+\frac{m^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.1)$$

$X$  suit une  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Le but est de proposer une version dynamique de ce résultat dans le cas de certains processus gaussiens, notamment le mouvement Brownien. Nous allons examiner dans un premier temps un cas élémentaire.

Soit  $m \in \mathbb{R}$ , on considère le processus  $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, T]}$  défini par

$$\tilde{B}_t = B_t + mt. \quad (3.2)$$

On peut montrer très simplement que  $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, T]}$  est un mouvement Brownien sous la probabilité  $P$  si et seulement si  $m = 0$ . Le but est de trouver une probabilité  $Q$  sous laquelle  $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, T]}$  est un mouvement Brownien standard. Comme  $\tilde{B}_t$  suit une  $\mathcal{N}(mt, t)$ , par analogie avec (3.1) on pose

$$L_t = e^{-m\tilde{B}_t} e^{\frac{m^2 t}{2}} = e^{-mB_t} e^{-\frac{m^2 t}{2}}. \quad (3.3)$$

On a alors

- a) à  $t$  fixé,  $\tilde{B}_t$  suit sous la probabilité  $Q_t$  de densité  $L_t$  par rapport à  $P$  une  $\mathcal{N}(0, t)$ ,
- b) le processus  $(L_t)_{t \in [0, T]}$  est une martingale sous  $P$ .

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 3.1.1** *Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Sous la probabilité  $Q$  définie par*

$$\frac{dQ}{dP} = L_T,$$

$(\tilde{B}_t)_{t \in [0, T]}$  est un mouvement Brownien standard.

Nous aurons besoin du petit lemme suivant dans la démonstration.

**Lemme 3.1.1** *Un processus  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  est une martingale sous  $Q$  ssi le processus  $(L_t M_t)_{t \in [0, T]}$  est une martingale sous  $P$ .*

**Preuve du lemme :** Remarquons tout d'abord que si  $Z$  est  $\mathcal{F}_s^B$  mesurable et bornée,

$$E_Q[Z] = E[L_s Z].$$

Si  $t \geq s$  et si  $Y$  est  $\mathcal{F}_s^B$  mesurable et bornée,

$$E_Q[M_t Y] = E[L_T M_t Y] = E[E[L_T M_t | \mathcal{F}_s^B] Y] = E[E[E[L_T M_t | \mathcal{F}_t^B] | \mathcal{F}_s^B] Y]$$

ainsi

$$E_Q[M_t Y] = E[E[L_t M_t | \mathcal{F}_s^B] Y] = E\left[\frac{L_s}{L_t} E[L_t M_t | \mathcal{F}_s^B] Y\right] = E_Q\left[\frac{1}{L_s} E[L_t M_t | \mathcal{F}_s^B] Y\right].$$

Donc

$$E_Q[M_t | \mathcal{F}_s^B] = \frac{1}{L_s} E[L_t M_t | \mathcal{F}_s^B]. \square$$

**Preuve de la proposition :** Tout d'abord on montre (exo) que  $L_t \tilde{B}_t$  est une  $P$  martingale continue de carré intégrable nulle en zéro. Ensuite, d'après la proposition 1.3.2, il suffit de montrer,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ , que le processus  $e^{\theta \tilde{B}_t - \frac{\theta^2 t}{2}}$  est une  $Q$  martingale i.e d'après le lemme que  $L_t e^{\theta \tilde{B}_t - \frac{\theta^2 t}{2}} = e^{(m+\theta)B_t - \frac{1}{2}(m+\theta)^2 t}$  est une  $P$  martingale ce qui est connu.  $\square$

### 3.2. THÉORÈME DE REPRÉSENTATION DES MARTINGALES BROWNIENNES 79

Nous voyons que le processus  $(L_t)_{t \in [0, T]}$  joue ici un rôle fondamental. Il est appelé dans la littérature une martingale exponentielle. Plus généralement, si  $(\theta_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{H}_{loc}^2(\Omega \times [0, T])$ , on note

$$L_t = e^{-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds} \quad (3.4)$$

et on voit d'après la formule d'Itô que  $dL_t = -L_t \theta_t dB_t$ .

**Exercice 3.1.1** 1) Montrer que  $(L_t)_{t \in [0, T]}$  est une surmartingale positive.  
2) Montrer que  $(L_t)_{t \in [0, T]}$  est une martingale ssi  $E[L_T] = 1$ .

On a alors la généralisation suivante de la proposition 3.1.1. (cf [1])

**Théorème 3.1.1 (Girsanov)** Soit  $(\theta_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{H}_{loc}^2(\Omega \times [0, T])$  tel que le processus  $(L_t)_{t \in [0, T]}$  défini par

$$L_t = e^{-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds} \quad (3.5)$$

soit une martingale sous  $P$ . Sous la probabilité  $Q$  définie par

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds},$$

le processus  $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, T]}$  vérifiant  $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$  est un mouvement Brownien standard.

La proposition suivante (cf [1]) nous donne une condition d'intégrabilité pour l'emploi du théorème précédent. Elle donne en effet un critère permettant de vérifier que  $(L_t \theta_t)_{t \in [0, T]} \in L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$  ce qui est suffisant car  $dL_t = -L_t \theta_t dB_t$ .

**Proposition 3.1.2** Le processus  $(L_t)_{t \in [0, T]}$  défini par (3.5) est une martingale si

$$E[e^{\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds}] < \infty.$$

## 3.2 Théorème de représentation des martingales Browniennes

Nous savons que lorsque  $(\theta_t)_{t \in [0, T]} \in L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$  l'intégrale stochastique  $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{t \in [0, T]}$  est une martingale (par rapport à la tribu Brownienne) continue et de carré intégrable. Le but de cette partie est de montrer qu'en fait toutes les martingales (par rapport à la tribu Brownienne) continues et de carré intégrable sont de la forme précédente.

**Exemple 3.2.1** Nous savons que les processus  $((B_t)^2 - t)_{t \in [0, T]}$  et  $(e^{\theta B_t - \theta^2 \frac{t}{2}})_{t \in [0, T]}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) sont des  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$  martingales. On a de plus (exemple 1.3.1)

$$B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_s dB_s$$

et d'après la Formule d'Itô,

$$e^{\theta B_t - \theta^2 \frac{t}{2}} = \theta \int_0^t e^{\theta B_s - \theta^2 \frac{s}{2}} dB_s.$$

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

**Lemme 3.2.1** L'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  des variables aléatoires de la forme

$$e^{\int_0^T h(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T h(s)^2 ds} \quad (3.6)$$

où  $h \in L^2([0, T], dx)$  est dense dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ .

**Preuve :** Soit  $Y \in \mathcal{V}^\perp$ , il faut montrer que  $Y = 0$ . Pour  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  et  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p \leq T$ , (3.6) entraîne

$$E[Y e^{\lambda_1 B_{t_1} + \dots + \lambda_p B_{t_p}}] = 0.$$

Ainsi, la mesure définie  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$  par

$$\mu(A) = E[Y 1_A(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})]$$

a une transformée de Laplace qui est nulle : elle est donc nulle. Donc,  $\forall G \in \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})$ ,

$$E[Y 1_G] = 0.$$

Par un argument classique de classe monotone (voir ???), on montre que  $\forall G \in \mathcal{F}_T^B$

$$E[Y 1_G] = 0.$$

Ainsi,  $Y = 0$ .  $\square$

**Théorème 3.2.1** (Théorème de représentation d'Itô) Soit  $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ , alors il existe un unique  $(\theta_t)_{t \in [0, T]} \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  tel que

$$F = E[F] + \int_0^T \theta_s dB_s. \quad (3.7)$$

### 3.2. THÉORÈME DE REPRÉSENTATION DES MARTINGALES BROWNIENNES 81

**Preuve : Etape 1 :** Cas où  $F \in \mathcal{V}$

Si  $F$  est de la forme (3.6) on a  $E[F] = 1$  et la formule d'Itô nous assure que

$$F = 1 + \int_0^T \left[ h(u) \underbrace{e^{\int_0^u h(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^u h(s)^2 ds}}_{L_u^h} \right] dB_u.$$

De plus  $(h(t)L_t^h)_{t \in [0, T]} \in L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$  car

$$E \left[ \int_0^T (h(u)L_u^h)^2 du \right] = \int_0^T e^{\int_0^u h^2(t)dt} h^2(u) dt \leq e^{\int_0^T h^2(t)dt} \int_0^T h^2(t) dt < \infty$$

ainsi par isométrie,

$$E \left[ \left( \int_0^T h(u)L_u^h dB_u \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^T (h(u)L_u^h)^2 du \right].$$

La propriété (3.7) est donc vrai pour toutes les variables de la forme (3.6) et même (par linéarité) pour toutes les combinaisons linéaires de variables de la forme (3.6).

**Etape 2 :** Cas général

Dans le cas général, si  $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ , il existe (lemme 3.2.1) une suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de combinaisons linéaires de variables aléatoires de la forme (3.6) qui converge vers  $F$  dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ . D'après l'étape précédente il existe une suite  $(\theta^n) \in L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$  telle que

$$F_n = E[F_n] + \int_0^T \theta_s^n dB_s.$$

On veut alors légitimer le passage à la limite dans la formule précédente. En utilisant les propriétés d'isométrie de l'intégrale stochastique on montre successivement que

a) La suite  $(\theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$  et donc (théorème 0.5.2) converge vers  $\theta \in L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$ .

b)  $F = \lim_{L^2} F_n = \lim_{L^2} \left( E[F_n] + \int_0^T \theta_s^n dB_s \right) = E[F] + \int_0^T \theta_s dB_s.$

c) La représentation ci-dessus est unique dans  $L_{prog}^2(\Omega \times [0, T])$ .  $\square$

**Théorème 3.2.2** (*Théorème de représentation des martingales Browniennes*)  
 Soit  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  une martingale (par rapport à la tribu Brownienne) continue et de carré intégrable, alors, il existe un unique  $(\theta_t)_{t \in [0, T]} \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  tel que

$$M_t = E[M_0] + \int_0^t \theta_s dB_s. \quad (3.8)$$

**Preuve :**  $M_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ , donc il existe un unique  $(\theta_t)_{t \in [0, T]} \in L^2_{prog}(\Omega \times [0, T])$  tel que

$$M_T = \underbrace{E[M_T]}_{E[M_0]} + \int_0^T \theta_s dB_s.$$

De plus, d'après (2.6)

$$M_t = E[M_T | \mathcal{F}_t^B] = E[M_0] + E\left[\int_0^T \theta_s dB_s | \mathcal{F}_t^B\right] = E[M_0] + \int_0^t \theta_s dB_s. \square$$

**Remarque 3.2.1** *La preuve ci-dessus est un résultat d'existence théorique. Néanmoins, en utilisant les techniques du Calcul de Malliavin (voir [2]), on peut dans certains cas trouver la forme explicite du processus qui intervient dans la représentation.*

# Bibliographie

- [1] I. KARATZAS, S. SHREVE : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, New York, 1988.
- [2] D. NUALART : *The Malliavin Calculus and related Topics*, Springer Verlag, New York, 1995.



# Chapitre 4

## Applications à la finance (cadre général)

### 4.1 Petite introduction

#### 4.1.1 Un peu d'histoire

Jusque dans les années 70, la pratique concrète et quotidienne des opérateurs en bourse et des agents de change nécessitait très peu de mathématiques. Il s'agissait principalement des techniques traditionnelles d'actuariat. Au vue des moyens techniques relativement lourds que nous avons exposés dans les chapitres précédents et que nous allons appliquer à des problématiques financières, une question naturelle se pose : Comment en est on arrivé là ? Pourquoi ce besoin si conséquent (et si récent) de mathématiques ?

L'explication fondamentale est l'explosion des marchés financiers dérivés (notamment des marchés d'option). Ces marchés répondent historiquement à une problématique très concrète de gestion des risques. Un exemple majeur est la création en Hollande au XVII ème siècle d'un marché de la tulipe d'un type nouveau. Traditionnellement, ce qu'on appelle un marché financier est un lieu physique où se joue la loi de l'offre et de la demande : concilier de manière pacifique, les intérêts apparemment contradictoires entre vendeurs et acheteurs en proposant un juste prix. En Hollande, de nouvelles techniques d'appréhension de l'incertitude vont être mises en place : voulant se prémunir contre les aléas climatiques qui impliquaient des variations de production et donc de revenu, les producteurs et les acheteurs de bulbes de tulipe eurent l'idée innovante de mettre en place des instruments financiers (les options) qui donnaient le droit de fixer à l'avance le prix des transactions futures en échange du versement d'une prime de départ. L'expérience fût de courte durée, lors d'un hiver très clément, le cours du bulbe s'effondra, les producteurs exercèrent en masse leurs options et

les négociants ne purent faire face.

**Question :** Comment fixer le montant de la prime d'un tel produit financier (**PRICING**) et comment utiliser cette prime de manière rationnelle pour pouvoir mener le contrat à terme indépendamment des scénari possibles (**HEDGING**) ?

L'explosion récente de ce type de marchés, dans les années 70 aux Etats-Unis (Chicago Board of Options Exchange en 1973) et dans les années 80 en Europe (Marché d'Options Négociables de Paris en 1987) peut être attribuée à plusieurs causes. Il est cependant incontestable que cette pratique ait pu se développer en raison de la création de nouveaux outils de gestion des risques liés à certaines propriétés de l'intégrale stochastique. Ceci valut à Black, Scholes et Merton (voir [2] et [7]) leur prix Nobel (obtenu en 1997 pour leurs travaux datant de 1973) et provoqua un profond bouleversement conceptuel.

#### 4.1.2 De l'intégrale stochastique ?

On se place ici volontairement dans un cadre très simple qui se veut éclairant sur le rôle naturel joué par l'intégrale stochastique. On omet notamment les problèmes d'actualisation.

On se place sur un intervalle de temps  $[0, T]$  et on se donne une subdivision  $0 = t_1 < \dots < t_n = T$  de cet intervalle. On considère (c'est en fait le modèle de Bachelier voir [1]) que le cours (c'est à dire le prix) d'un actif financier à  $t \in \{t_1, \dots, t_n\}$  est donné par  $B_t$ . On considère un trader (un intervenant spécifique du marché qui a le droit de vendre et d'acheter cet actif) qui met en place la stratégie suivante : pour  $f \in L^2([0, T], dx)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

- a) Il achète  $f(t_i)$  actifs à  $t_i$  (au prix  $B_{t_i}$ )
- b) Il les revend à  $t_{i+1}$  (au prix  $B_{t_{i+1}}$ )
- c) Il réalise sur la période  $[t_i, t_{i+1}]$  le bénéfice  $f(t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ .

Sur  $[0, T]$  le bénéfice est donc donné par

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Si le trading s'opère en temps continu, le bénéfice devient

$$\int_0^T f(s)dB_s.$$

Ceci se généralise (sans mal et par le même raisonnement) au cas où le cours de l'actif est donné par un processus d'Itô régulier  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  et au cas où la fonction  $f$  est une fonction aléatoire (un processus) non anticipante (c'est à dire prog-mes par rapport à la tribu Brownienne) symbolisant une prise de décision.

Continuons l'investigation : considérons un produit financier quelconque dont la valeur à  $T$  notée  $P(T)$  est de la forme

$$P(T) = k + \int_0^T f(t) dS_t. \quad (4.1)$$

On peut montrer que si le marché vérifie une hypothèse naturelle (l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, cf infra) le prix à payer à  $t = 0$  pour disposer de ce produit financier est  $k$ . De la même manière, si je suis vendeur de ce produit financier, en disposant à  $t = 0$  du montant  $k$  et en mettant en place la stratégie de positionnement donnée par  $f$ , je suis capable de livrer le produit à  $T$  indépendamment des aléas du cours.

**Dans le cas bien précis où  $P(T)$  est de la forme 4.1, on répond aux problèmes du Pricing et du Hedging. Dans le cas où cette hypothèse est vérifiée pour tous les produits financiers (on dit alors que le marché est complet), la question initiale est entièrement résolue!!!**

Notons pour conclure que le théorème de représentation des martingales Browniennes vu au chapitre précédent est le résultat théorique fondamental qui assurera la complétude des marchés que nous considérerons. C'est un des secrets des mathématiques qui se cachent derrière les produit dérivés.

### 4.1.3 Le calcul stochastique : une nouvelle main invisible ?

Au vue des quelques considérations évoquées ci-dessus (lien profond entre des mathématiques puissantes, belles et certaines problématiques financières très concrètes) la célèbre main invisible d'Adam Smith (machine parfaite à fabriquer un juste prix) semble avoir perdu un peu de son mystère. Pour finir cette partie une anecdote à méditer, propice à la modestie :

En 1997 Black, Scholes et Merton reçoivent le prix Nobel d'économie pour leur approche novatrice des produits dérivés, un an plus tard leur fond d'investissement "Long Term Capital Management" fait faillite...([3])

## 4.2 Modélisation d'un marché financier en temps continu

On se place sur une période de temps  $[0, T]$  ( $T$  est appelée l'échéance) et sur un espace  $\Omega$  qui représente toutes les configurations macro-économiques possibles durant cet intervalle. L'espace  $\Omega$  est équipé d'une tribu  $\mathcal{A}$  qui est la structure d'information totale et d'une probabilité  $P$  appelée probabilité historique. Notons que l'information nécessaire à la connaissance parfaite de  $\mathcal{A}$  et  $P$  est en pratique inaccessible.

### 4.2.1 Les actifs présents sur le marché

On se place dans le cadre le plus élémentaire d'un marché constitué d'un actif sans risque et d'un actif risqué.

**L'actif sans risque :** On suppose qu'est disponible sur la période  $[0, T]$  un taux d'intérêt continu  $r > 0$  (supposé, pour simplifier, constant) correspondant par exemple au taux proposé par la banque de France sur cette période. Ainsi, si  $S_t^0$  représente la valeur capitalisé d'un euro (placé à  $t = 0$ ), on a,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $S_t^0 = e^{rt}$ . Cet actif est dit sans risque car sa valeur est indépendante de tout aléa.

Lorsque  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  est un processus, on note  $(\tilde{X}_t)_{t \in [0, T]}$  le processus actualisé i.e  $\tilde{X}_t = \frac{X_t}{e^{rt}}$

**L'actif risqué :** Il s'agira essentiellement pour nous d'une action (part du capital d'une entreprise) cotée sur un marché organisé. Cet actif est dit risqué car, contrairement au précédent, sa dynamique dépend des aléas macro-économiques. On notera  $\forall t \in [0, T]$ ,  $S_t$  la valeur (aléatoire) de cette action à  $t$ . Ainsi  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est un processus stochastique qui est adapté à sa filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  ( $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u; u \leq T)$ ) et que nous supposons **continu**. La tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information disponible sur le marché à la date  $t$ .

**HYP : Le cours de l'actif risqué est donné par un processus d'Itô (généralisé o non) dont la valeur en 0 est une constante !**

**Remarque 4.2.1** *Sous l'hypothèse précédente, une V.A  $\mathcal{F}_0$  mesurable est une constante.*

### 4.2.2 Stratégies financières

**HYP :** on suppose le marché sans frictions

- i) Pas de coûts de transaction pour la vente ou l'achat d'actifs
- ii) Vente à découvert et emprunt à la banque illimités
- iii) Actifs indéfiniment divisibles : on peut acheter ou vendre des fractions d'actifs
- iv) Trading en temps continu : on peut acheter ou vendre à tout instant.
- v) L'actif risqué ne reverse pas de dividendes.

**Définition 4.2.1** Une stratégie financière est un processus stochastique  $(H_t = (\theta_t^0, \theta_t)_{t \in [0, T]})$  progressivement mesurable, à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et tel que les intégrales

$$\int_0^T \theta_t^0 dS_t^0 \quad \text{et} \quad \int_0^T \theta_t dS_t$$

aient un sens. On associe à toute stratégie financière un portefeuille financier contenant à  $t \in [0, T]$   $\theta_t^0$  unités d'actif sans risque et  $\theta_t$  unités d'actif risqué. La valeur à  $t \in [0, T]$  du portefeuille associé à une stratégie  $H$  est donnée par

$$V_t^H = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t S_t. \quad (4.2)$$

**Remarque 4.2.2** a) Le fait que le processus  $(H_t)_{t \in [0, T]}$  soit progressivement mesurable est très naturel : la prise de décision en  $t$  ne peut se faire qu'avec la connaissance de l'information disponible à  $t$  i.e  $\mathcal{F}_t$ .

b) Le fait que  $(H_t)_{t \in [0, T]}$  soit indexé par  $[0, T]$  et à valeur  $\mathbb{R}^2$  est une conséquence de ii), iii) et iv).

c) L'expression (4.2) est une conséquence de i) et v).

### 4.2.3 Autofinancement

**Définition 4.2.2** Une stratégie  $(H_t)_{t \in [0, T]}$  est dite autofinancée si la valeur du portefeuille associé vérifie l'EDS suivante :

$$dV_t^H = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t dS_t. \quad (4.3)$$

**Remarque 4.2.3** Sur un intervalle de temps  $[t, t + dt]$ , (4.3) implique que

$$V_{t+dt}^H - V_t^H = \int_t^{t+dt} \theta_u^0 dS_u^0 + \int_t^{t+dt} \theta_u dS_u :$$

les changements de valeur du portefeuille proviennent uniquement des changements de valeur des actifs. Il n'y a ni retrait ni injection de cash entre 0 et  $T$ . Une stratégie autofinancée est donc une stratégie où la seule marge de manoeuvre est de pouvoir réajuster les actifs en permanence.

**Lemme 4.2.1** Soient  $(H_t)_{t \in [0, T]}$  et  $(H'_t)_{t \in [0, T]}$  deux stratégies autofinancées telles que  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$V_t^H = V_t^{H'} \quad P.p.p$$

alors  $H$  et  $H'$  sont égales (au sens de l'indistinguabilité).

**Preuve :** C'est une conséquence immédiate de la condition d'autofinancement (4.3) et de la proposition 2.4.2.  $\square$

**Proposition 4.2.1** Une stratégie est autofinancée ssi

$$d\tilde{V}_t^H = \theta_t d\tilde{S}_t \quad (4.4)$$

**Preuve :** On suppose que  $(H_t)_{t \in [0, T]}$  est autofinancée i.e  $dV_t^H = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t dS_t$ . Comme  $\tilde{V}_t^H = \frac{V_t^H}{e^{rt}}$  avec  $d(e^{-rt}) = -re^{-rt}dt$ , en appliquant la formule d'IPP (2.17)

$d\tilde{V}_t^H = e^{-rt}dV_t^H - V_t^H re^{-rt}dt = e^{-rt}\theta_t^0 dS_t^0 + e^{-rt}\theta_t dS_t - \theta_t^0 S_t^0 re^{-rt}dt - \theta_t S_t re^{-rt}dt$   
ainsi,

$$d\tilde{V}_t^H = e^{-rt}\theta_t dS_t - \theta_t S_t re^{-rt}dt = \theta_t(e^{-rt}dS_t - S_t re^{-rt}dt) = \theta_t d\tilde{S}_t.$$

La réciproque se fait par un raisonnement en tout point analogue.  $\square$

**Remarque 4.2.4** La proposition précédente nous assure que la valeur d'une stratégie autofinancée ne dépend que de sa valeur initiale et de la quantité d'actif risqué. La quantité d'actif sans risque se déduisant de la relation d'autofinancement

$$\tilde{V}_t^H = \theta_t^0 + \theta_t \tilde{S}_t. \quad (4.5)$$

On notera désormais  $V^{x, \theta}$  ( $x$  étant le capital initial) pour  $V^H$ .

#### 4.2.4 Arbitrages

**Définition 4.2.3** Une stratégie autofinancée  $(H_t)_{t \in [0, T]}$  est appelée une opportunité d'arbitrage (O.A) si les conditions suivantes sont vérifiées

$$V_0^H = 0, \quad V_T^H \geq 0 \quad P.p.p \quad \text{et} \quad P(V_T^H > 0) > 0. \quad (4.6)$$

En d'autres termes, il y a une possibilité de gain certain en  $T$  en ayant investi aucun capital en  $t = 0$ .

**Remarque 4.2.5** La notion d'O.A dépend du choix de la probabilité historique  $P$ . Cependant si  $P^*$  est une probabilité équivalente à  $P$ , on peut remplacer  $P$  par  $P^*$  dans la définition précédente.

**Exemple 4.2.1** *Si l'actif risqué est coté à deux prix différents dans deux bourses différentes, une opportunité d'arbitrage triviale existe (les coûts de transaction sont exclus). De telles anomalies ne devraient pas exister sur un marché financier qui fonctionne bien.*

Il existe sur le marché des opérateurs, les arbitragistes, chargés de détecter et de profiter des O.A. Par la loi de l'offre et de la demande, leur simple présence fait que les O.A sont éphémères. En modélisation financière classique on supposera toujours l'absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A) tout du moins pour une large famille (à préciser) de stratégies autofinancées (appelées les stratégies admissibles).

#### 4.2.5 Mesures martingales équivalentes (MME)

**Définition 4.2.4** *Une MME est une probabilité  $P^*$  équivalente à  $P$  sous laquelle le prix actualisé  $(\tilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$  de l'actif risqué est une martingale.*

Il existe un lien profond entre l'existence de MME et l'hypothèse d'AOA. Nous ne rentrerons pas dans le détail de cette problématique dans ce cours (voir [4]), cependant, nous avons le résultat suivant.

Supposons l'existence d'une MME  $P^*$ .

**Définition 4.2.5** *Une stratégie  $(H_t)_{t \in [0, T]}$  est dite  $P^*$  admissible si elle est autofinancée et si sa valeur actualisée  $(\tilde{V}_t^H)$  est une martingale sous  $P^*$ .*

**Proposition 4.2.2** *Il y a AOA parmi les stratégies  $P^*$  admissibles.*

**Preuve :** D'après la remarque 4.2.5, on considère  $P = P^*$  dans la définition 4.2.3. Soit  $H$  une stratégie  $P^*$  admissible telle que  $V_T^H \geq 0$   $P^*$  p.p et  $P^*(V_T^H > 0) > 0$ . Comme  $V_0^H = E[\tilde{V}_T^H | \mathcal{F}_0] = E[\tilde{V}_T^H]$ ,  $V_0^H > 0$  et  $H$  ne peut être une OA.  $\square$

**Exercice 4.2.1** *Montrer que si les valeurs des portefeuilles associés à deux stratégies  $P^*$  admissibles coïncident ( $P$ -p.p) à  $T$ , elles coïncident ( $P$ -p.p) pour tout  $t \in [0, T]$ .*

#### 4.2.6 Les actifs contingents

**Définition 4.2.6** *Un actif contingent est un actif financier dépendant d'une variable plus fondamentale (pour nous l'actif risqué). Il s'agira dans le cadre de ce cours d'une V.A  $\mathcal{F}_T$  mesurable (vérifiant certaines conditions techniques d'intégrabilité).*

**Exemple 4.2.2** *Il existe de nombreux actifs contingents. Une famille importante est constituée de ce que l'on appelle les options (de vente ou d'achat). Le but de ce cours n'est pas de détailler ce type d'actifs et nous renvoyons le lecteur à [5] pour plus de précisions. Nous donnerons 2 définitions :*

a) Un **Call européen** d'échéance  $T$ , de strike  $K$  sur l'actif risqué est un produit financier donnant le droit (et non l'obligation) à son détenteur d'acheter en  $T$  une (ou plusieurs) unité d'actif risqué au prix  $K$  qui a été fixé en  $t = 0$ . La valeur en  $T$  de ce produit (i.e à l'échéance lorsqu'il n'y a plus d'aléas) est égale à  $\text{Max}(S_T - K, 0) := (S_T - K)_+$  (c'est le flux financier engendré par ce produit à l'échéance, flux qui est aussi appelé *payoff*).

a) Un **Put européen** d'échéance  $T$ , de strike  $K$  sur l'actif risqué est un produit financier donnant le droit (et non l'obligation) à son détenteur de vendre en  $T$  une (ou plusieurs) unité d'actif risqué au prix  $K$  qui a été fixé en  $t = 0$ . Le *payoff* est dans ce cas égal à  $\text{Max}(K - S_T, 0) := (K - S_T)_+$ .

Ces deux types de produit donnant des droits à leur détenteur, ils ont un prix (appelé la prime) qui doit être versé à  $t = 0$ .

### 4.3 Plan d'attaque et objectifs

**Etape 1 : Définir la dynamique de l'actif risqué.**

On a affaire ici à une double contrainte :

- 1) Le modèle doit être suffisamment fin pour rendre compte de la réalité.
- 2) Le modèle doit être suffisamment simple pour être opérationnel (cf infra).

**Etape 2 : Etudier les propriétés du modèle.**

Vérifie t-il notamment la condition d'AOA ?

**Etape 3 : Proposer un prix pour une large famille d'actifs financier (PRICING).**

Ce prix doit de plus être calculable en pratique :

- a) Soit en obtenant une formule fermée dont on connaît tous les paramètres (au moins de manière statistique).

b) Soit en obtenant des formules théoriques qui peuvent être approchées par des méthodes numériques efficaces (discrétisation, méthodes de type Monte Carlo).

**Etape 4 : Proposer des stratégies financières permettant de se couvrir (au moins en partie) contre le risque (HEDGING).**

Une fois que le prix d'un contrat financier a été fixé, que faire de la prime pour assurer la livraison de ce produit indépendamment de l'aléa des cours ?

**Etape 5 : (Enfin et surtout....) Confronter le modèle à la réalité.**

### 1) Réalité des marchés

De nombreux produits financiers élémentaires sont cotés sur des marchés particuliers : Les marchés dérivés. C'est le cas notamment de certains Call et Put Européens. Il convient alors de

a) Confronter les prix déduits du modèle aux prix du marché en calibrant si possible les paramètres inconnus grâce aux données réelles.

b) Proposer ensuite des méthodes pour les produits non cotés qui s'échangent notamment sur les marchés de gré à gré.

### 2) Réalité des modèles

Il convient enfin de soumettre son modèle à la comparaison des autres modèles, quelques critères peuvent être :

a) La précision

b) Le temps de calcul

c) Le champs d'application

**Il est bon de garder en tête que les banques ont sous la main des modèles qui fonctionnent depuis longtemps et qui ont fait leurs preuves. Le basculement vers d'autres techniques de modélisation a un coût financier (apprentissage, implémentation) qui doit être largement compensé par la pertinence du nouvel outil proposé...**



# Bibliographie

- [1] L. BACHELIER : *Théorie de la spéculation*, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 17, 21-86, 1900.
- [2] F. BLACK, M. SCHOLES : *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81, n°3, 637-654, 1973.
- [3] N. DUNBAR : *Inventing Money : The story of Long-Term Capital Management and the legends behind it*, John Wiley and Sons, 2001.
- [4] J.M. HARRISON, S. PLISKA : *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Processes and their applications, 11, 215-260, 1981.
- [5] J.C. HULL : *Options, Futures and other derivatives*, Prentice Hall, 2003.
- [6] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Second edition, Ellipses, Paris, 1997.
- [7] R. MERTON : *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183, 1973.



# Chapitre 5

## Modèle de Black et Scholes

### 5.1 Le modèle

#### 5.1.1 Dynamique de l'actif risqué

Dans le modèle de Black et Scholes ([2]), la dynamique de l'actif risqué est donnée par l'EDS suivante

$$\underline{dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dB_t} \quad (5.1)$$

de condition initiale  $S_0 = x_0 > 0$ . Nous avons vu (prop 2.5.1) que cette EDS a une unique solution donnée par le Brownien géométrique

$$S_t = x_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}. \quad (5.2)$$

**Remarque 5.1.1** *Il est très facile de déduire de la formulation précédente que la filtration d'information associée dans ce cas n'est autre que la filtration Brownienne.*

Notons de plus que ce processus est positif et dépend *a priori* de deux paramètres  $b$  et  $\sigma$  respectivement appelés la tendance et la volatilité (plus généralement la volatilité est le rapport  $\frac{\text{coefficient de diffusion}}{\text{cours de l'actif}}$ ). La terminologie s'explique par le fait que  $\sigma$  mesure la sensibilité à l'aléa i.e au risque, alors que la relation  $E[S_t] = x_0 e^{bt}$  nous indique, qu'en moyenne, l'actif croît comme un actif sans risque associé au taux constant  $b$ .

**Remarque 5.1.2** *Il est tout à fait naturel de se poser la question du choix de (5.2) pour modéliser le cours d'un actif. Pour aboutir à cette dynamique, Black et Scholes ont fait les hypothèses financières suivantes :*

- 1) *Continuité des trajectoires.*
- 2) *Stationnarité des rendements : la loi de  $\frac{S_{t+h} - S_t}{S_t}$  ne dépend que de  $h$ .*

3) Indépendance des rendements :  $\frac{S_{t+h}-S_t}{S_t} \perp \mathcal{F}_t^S$ .

On sait (lemme 1.1.1 en posant  $X_t = \log(S_t)$ ) que ces hypothèses conduisent à une dynamique de type (5.2).

De plus, on peut montrer que cette dynamique est celle que l'on obtient naturellement en passant à la limite dans un célèbre modèle en temps discret : Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein ([4]).

Nous verrons cependant un peu plus loin les limites de ce choix.

### 5.1.2 Existence d'une MME

**Proposition 5.1.1** Dans le modèle de Black and Scholes il existe une MME (def 4.2.4).

**Preuve :** Comme  $dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dB_t$ , on obtient en appliquant la formule d'I.P.P (exercice 2.4.1) que

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t(b-r)dt + \sigma\tilde{S}_t dB_t \quad (5.3)$$

et en posant  $W_t = B_t + \frac{b-r}{\sigma}t$ ,

$$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dW_t. \quad (5.4)$$

D'après le théorème de Girsanov (prop 3.1.1),  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  est sous la probabilité  $P_0^*$  définie par

$$dP_0^* = e^{(\frac{b-r}{\sigma})B_T} e^{+\frac{(b-r)^2 T}{2}} dP \quad (5.5)$$

un mouvement Brownien standard. Ainsi (prop 2.5.1), comme

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}},$$

le processus  $(\tilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$  est une martingale sous  $P_0^*$  (prop 1.3.1).  $\square$

**Remarque 5.1.3** La probabilité  $P_0^*$  est une MME aussi appelée parfois une probabilité risque neutre. L'explication de cette terminologie est la suivante, sous  $P_0^*$ ,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où  $W$  est un M.B standard. Ainsi, sous la probabilité  $P_0^*$ ,  $S_t$  croît en moyenne comme l'actif sans risque.

Notons de plus que  $\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^W$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

## 5.2 Les stratégies financières $P^*$ admissibles

On se fixe ici une MME  $P^*$ . On notera  $E^*[\cdot]$  l'espérance sous  $P^*$  par opposition avec  $E[\cdot]$  qui est l'espérance sous la probabilité historique  $P$ .

### 5.2.1 Définition

Pour des raisons techniques nous travaillerons désormais avec des stratégies autofinancées bien particulières (et suffisamment générales) : les stratégies  $P^*$  admissibles.

**Définition 5.2.1** Dans le cas du modèle de Black Scholes, une stratégie  $H$  est dite  $P^*$  admissible si elle est autofinancée et si le processus de valeur actualisée  $(\tilde{V}_t^{x,\theta})_{t \in [0,T]}$  est une martingale positive de carré intégrable (sous  $P^*$ ).

**Remarque 5.2.1** Dans la définition d'une stratégie financière (def 4.2.1) est imposée l'existence des intégrales

$$\int_0^T \theta_t^0 dS_t^0 = \int_0^T \theta_t^0 r e^{rt} dt \quad \text{et} \quad \int_0^T \theta_t dS_t = \int_0^T \theta_t S_t b dt + \int_0^T \sigma \theta_t S_t dB_t.$$

Si on impose la condition

$$\theta_0 \in \mathcal{H}_{loc}^1(\Omega \times [0, T]) \quad (5.6)$$

la première intégrale existe  $P$ -p.p (ou  $P^*$ -p.p) et si on impose

$$\theta \in \mathcal{H}_{loc}^2(\Omega \times [0, T]), \quad (5.7)$$

comme le processus  $(S_t)_{t \in [0,T]}$  est continu donc borné, alors  $\theta_t S_t b \in \mathcal{H}_{loc}^1(\Omega \times [0, T])$  et  $\sigma \theta_t S_t \in \mathcal{H}_{loc}^2(\Omega \times [0, T])$ . Ceci assure l'existence de la deuxième intégrale.

Notons au passage que la définition de  $\mathcal{H}_{loc}^1(\Omega \times [0, T])$  et  $\mathcal{H}_{loc}^2(\Omega \times [0, T])$  est indépendante du choix de  $P$  ou  $P^*$ .

### 5.2.2 $P^*$ -complétude du marché

**Définition 5.2.2** Un actif contingent sera dans ce paragraphe une variable aléatoire  $h$  positive et dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P^*)$ .

**Exemple 5.2.1** Les put et les call sont des actifs contingents.

**Définition 5.2.3** Un actif contingent est dit  $P^*$  simulable si il est égal à la valeur finale du portefeuille associé à une stratégie  $P^*$  admissible.

**Définition 5.2.4** *Le marché est  $P^*$  complet si tout actif contingent est  $P^*$  simulable.*

On a alors le résultat fondamental suivant :

**Théorème 5.2.1** *Le modèle de Black et Scholes est  $P^*$  complet. De plus, la valeur à l'instant  $t$  de **tout** portefeuille simulant est donnée par*

$$V_t = E^*[he^{-r(T-t)}|\mathcal{F}_t^B]. \quad (5.8)$$

En particulier, d'après la proposition 2.5.3,  $V_t$  est une fonction de  $t$  et de  $S_t$ .

**Preuve :** Comme  $(\tilde{V}_t^{x,\theta})_{t \in [0,T]}$  est une martingale sous  $P^*$ , le deuxième point est évident.

Pour ce qui est du premier point nous faisons la preuve dans la cas où  $P^* = P_0^*$  (le cas général se traitant à peu de choses près de la même manière). Nous reprendrons par ailleurs les notations de la preuve du théorème 5.1.1.

Soit  $h$  un actif contingent (pour  $P_0^*$ ). Sous la probabilité  $P_0^*$ , le processus défini par  $M_t = E^*[e^{-rT}h|\mathcal{F}_t^B]$  est une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration Brownienne  $(\mathcal{F}_t^W)$  (remarque 5.1.3) et donc, d'après le théorème 3.2.2, il existe un processus  $(K_t)_{t \in [0,T]} \in L_{prog}^2(\Omega \times [0,T], P_0^*)$  tel que  $\forall t \in [0,T]$ ,

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \quad P_0^* \text{ p.p.} \quad (5.9)$$

D'après (5.4),

$$M_t = M_0 + \int_0^t \frac{K_s}{\sigma \tilde{S}_s} d\tilde{S}_s \quad P_0^* \text{ p.p.}, \quad (5.10)$$

en posant

$$\theta_t = \frac{K_t}{\sigma \tilde{S}_t} \quad \text{et} \quad \theta_t^0 = M_t - \theta_t \tilde{S}_t, \quad (5.11)$$

le processus  $H = (\theta^0, \theta)$  est une stratégie financière (au sens de la définition 4.2.1) telle que par construction  $\forall t \in [0,T]$ ,

$$\tilde{V}_t^H = M_t.$$

Le processus  $(\tilde{V}_t^H)_{t \in [0,T]}$  est donc (sous  $P_0^*$ ) une martingale positive et de carré intégrable. D'après (5.10) et la proposition 4.2.1, la stratégie  $H$  est autofinancée. Au final,  $H$  est  $P_0^*$  admissible avec  $V_T^H = h$ , le résultat est donc prouvé.  $\square$

### 5.2.3 A.O.A parmi les stratégies $P^*$ admissibles

Le résultat suivant est l'analogue de la proposition 4.2.2.

**Proposition 5.2.1** *Il y a AOA parmi les stratégies  $P^*$  admissibles.*

**Remarque 5.2.2** *Notons qu'en général on a pas AOA parmi toutes les stratégies autofinancées, cette difficulté qui n'apparaît pas en temps discret est propre à la modélisation des marchés en temps continu.*

## 5.3 Unicité de la probabilité risque neutre

Le résultat suivant (que nous admettrons) est une conséquence de la  $P^*$  complétude du modèle de Black et Scholes et de l'AOA parmi les stratégies  $P^*$  admissibles.

**Proposition 5.3.1** *Dans le modèle de Black et Scholes il existe une unique MME (égale à  $P_0^*$ ).*

**Remarque 5.3.1** *On notera dorénavant  $P^*$  l'unique probabilité risque neutre (ou MME) donnée par (5.5). On parlera alors de stratégies admissibles, d'actifs contingents et de complétude en se référant implicitement à  $P^*$ .*

## 5.4 Proposer un prix, se couvrir

L'idée innovante de Black et Scholes a été de proposer la définition suivante du prix d'un actif financier.

**Définition 5.4.1** *Le prix à l'instant  $t \in [0, T]$  d'un actif contingent  $h$  est la valeur à l'instant  $t$  d'un portefeuille financier associé à une stratégie admissible qui réplique  $h$  (un tel portefeuille existe d'après le théorème 5.2.1). Le processus de prix sera noté  $(P_t^h)_{t \in [0, T]}$ , c'est une martingale sous  $P^*$ .*

**Remarque 5.4.1** *a) Cette notion de prix est indépendante du choix d'une MME (qui est ici unique) et du choix de la stratégie admissible de réplication (théo 5.2.1). Le prix à l'instant  $t$  est de plus donné par (5.8). La MME (qui n'a aucune signification macro-économique contrairement à la probabilité historique) est un outil pour calculer le prix des actifs*

*b) Dans certains modèles financiers, l'unicité de la MME n'est pas vérifiée. Pour un actif contingent donné, il peut exister plusieurs prix. On obtient donc dans ce cadre une fourchette de prix. On peut montrer néanmoins que la borne supérieure de cette fourchette est la plus petite valeur initiale d'un portefeuille de sur-réplication.*

Pour ce qui est du problème de la couverture d'un actif contingent, plaçons nous du point de vue du vendeur. Ce vendeur propose à la vente à  $t = 0$  un produit financier dont le payoff est donné par  $h$  (à  $T$ ). Le prix de cet actif à  $t = 0$  est donné par  $E^*[he^{rT}]$ . Se pose alors la question naturelle suivante : Que doit on faire de cette somme pour assurer à coup sûr la livraison de l'actif à  $T$ ? La réponse est très simple (tout du moins en théorie), il suffit de constituer le portefeuille de réplication donné par le théorème de représentation des martingales Browniennes (formule (5.11)). Notons que cette stratégie de réplication est unique en vertu de l'unicité dans l'écriture des processus d'Itô (propo 2.4.2). Cette stratégie de gestion en temps continu annule complètement (en théorie) le risque.

D'un point de vue pratique un premier problème se pose. Le théorème de représentation des martingales Browniennes (dans la version présentée ici) est un résultat d'existence non constructif. Nous allons voir cependant que dans certains cas importants la stratégie à mettre en oeuvre est explicite. Notons par ailleurs qu'une réponse générale à ce problème peut être apportée en utilisant les techniques du Calcul de Malliavin (voir [16]).

## 5.5 Evaluation et couverture dans le cas où $h = f(S_T)$

On parle dans ce cas d'actifs financiers "path-independent".

On se donne  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable et telle que  $E^*[f^2(S_T)] < +\infty$ . La valeur à  $t$  de l'actif contingent  $h = f(S_T)$  est donnée par

$$P_t^h = E^*[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t^B]$$

avec sous  $P^*$ ,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

donc

$$S_t = e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}.$$

D'après l'exercice 1.3.1 (ou la proposition 2.5.3), on a

$$P_t^h = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (5.12)$$

Ainsi  $P_t^h = F(t, S_t)$  où

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (5.13)$$

Notons au passage que cette formule est indépendante du drift  $b$ .

Nous avons le résultat suivant qui précise la régularité de  $F$ . Notons qu'en pratique cette régularité est une simple conséquence de changements de variables judicieux et d'applications du théorème de dérivation sous le signe somme.

**Lemme 5.5.1** *Sous des hypothèses très faibles (valides notamment dans le cas du Call et du Put), la fonction  $F$  définie ci-dessus est de classe  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ .*

On a alors le résultat fondamental suivant

**Proposition 5.5.1** *Lorsque  $h = f(S_T)$ , la quantité d'actif risqué que doit contenir à l'instant  $t$  le portefeuille admissible de couverture est donnée par*

$$\theta_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t). \quad (5.14)$$

De plus, la fonction  $F$  vérifie l'EDP suivante

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = rF(t, x) \quad (5.15)$$

de condition terminale  $F(T, x) = h(x)$ .

**Preuve :** On pose  $\tilde{F}(t, x) = e^{-rt}F(t, xe^{rt})$ . Ainsi  $\tilde{P}_t^h = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ . D'après la formule d'Itô (prop 2.4.5) que l'on applique de bon droit (lemme 5.5.1), on a

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) \underbrace{d\tilde{S}_u}_{\sigma \tilde{S}_u dW_u} \\ &+ \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u, \tilde{S}_u) du + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u, \tilde{S}_u) \sigma^2 \tilde{S}_u^2 du. \end{aligned}$$

De la même manière, on sait par autofinancement que

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \theta_u d\tilde{S}_u.$$

D'après la proposition 2.4.2, on obtient

$$\theta_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)$$

et

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u, \tilde{S}_u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u, \tilde{S}_u) \sigma^2 \tilde{S}_u^2 = 0.$$

Comme

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u, \tilde{S}_u) = -re^{-ru}F(u, S_u) + e^{-ru}\frac{\partial F}{\partial t}(u, S_u) + re^{-ru}S_u\frac{\partial F}{\partial x}(u, S_u)$$

et

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u, \tilde{S}_u) = e^{ru}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, S_u)$$

alors,

$$-re^{-ru}F(u, S_u) + e^{-ru}\frac{\partial F}{\partial t}(u, S_u) + re^{-ru}S_u\frac{\partial F}{\partial x}(u, S_u) + \frac{1}{2}e^{-ru}\sigma^2 S_u^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, S_u) = 0.$$

Puisque lorsque  $x_0$  varie,  $S_u$  prend toutes les valeurs de  $]0, +\infty[$  on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + rx\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = rF(t, x)$$

avec  $F(T, x) = h(x)$ .  $\square$

**Remarque 5.5.1** *Il est intéressant de remarquer que dans notre modèle le prix de l'actif peut être vu comme une espérance (5.12) ou comme la solution d'une EDP explicite (5.15). D'un point de vue numérique ce fait est remarquable car il permet d'utiliser des méthodes de type Monte Carlo ou des méthodes provenant de l'analyse numérique pour évaluer et couvrir les actifs. Ceci peut se généraliser à des modèles financiers plus généraux et dans ce cas, le choix de l'une ou l'autre technique peut s'avérer plus ou moins judicieux suivant le problème considéré.*

## 5.6 Formule de Black et Scholes

Il s'agit de la célèbre formule donnant le prix d'un Call dans notre contexte.

**Proposition 5.6.1** *Le prix  $C_t$  d'un call européen sur l'actif risqué (de strike  $K$  et d'échéance  $T$ ) est donné par*

$$C_t = S_t N(d_1(t, S_t)) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2(t, S_t)) \quad (5.16)$$

où

$$d_1(t, x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2(t, x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (5.17)$$

et où  $N$  est la fonction de répartition d'une  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Dans ce cas, la composition du portefeuille de couverture est donnée par

$$\theta_t = N(d_1(t, S_t)) > 0 \quad \text{et} \quad \theta_t^0 = -Ke^{-rT} N(d_2(t, S_t)) < 0. \quad (5.18)$$

**Preuve :** D'après (5.12),

$$C_t = F(t, S_t)$$

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}} - K e^{-r(T-t)} \right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (5.19)$$

Or on montre facilement que

$$x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}} - K e^{-r(T-t)} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -d_2(t, x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int_{-d_2}^{+\infty} \left( x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}} - K e^{-r(T-t)} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{d_2} \left( x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \sigma y \sqrt{T-t}} - K e^{-r(T-t)} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

En séparant les deux intégrales et en faisant dans la première le changement de variables  $z = y + \sigma\sqrt{T-t}$  on obtient

$$F(t, x) = xN(d_1(t, x)) - K e^{-r(T-t)} N(d_2(t, x)).$$

On en déduit (5.16) dont (5.18) découle immédiatement.  $\square$

**Exercice 5.6.1** *On considère un call et un put sur l'actif risqué de même échéance  $T$  et de même strike  $K$ . On note  $C_t$  et  $P_t$  leurs prix à  $t \in [0, T]$ . En utilisant l'exercice 4.2.1, montrer que la relation suivante (appelée relation de parité call-put) est vérifiée :*

$$C_t + K e^{-r(T-t)} = P_t + S_t. \quad (5.20)$$

*En déduire de la proposition précédente que le prix du put à  $t$  est donné par*

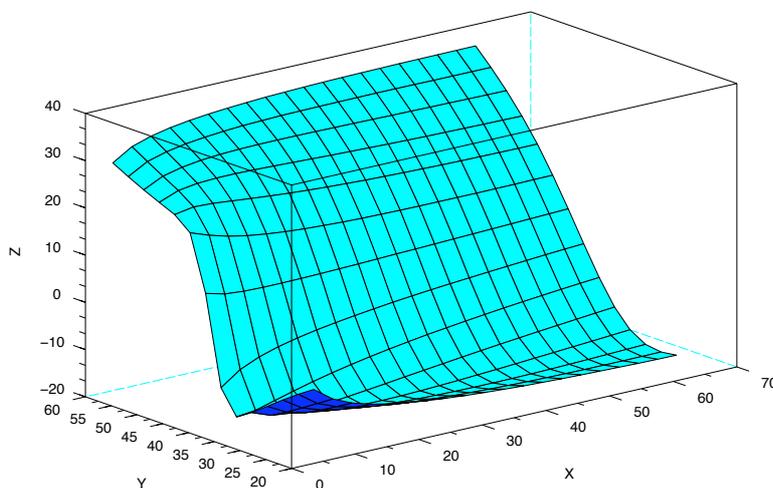
$$P_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2(t, S_t)) - S_t N(-d_1(t, S_t)) \quad (5.21)$$

*et que la composition du portefeuille de couverture associé est*

$$\theta_t = -N(-d_1(t, S_t)) < 0 \text{ et } \theta_t^0 = K e^{-rT} N(-d_2(t, S_t)) > 0. \quad (5.22)$$

**Remarque 5.6.1** *On remarque que les prix du put et du call sont des fonctions des paramètres  $(\sigma, S_t, r, K, T-t)$  qui sont de manière naturelle homogènes en  $S_t$ . Le paramètre  $T-t$  est appelé "time to maturity".*

Le graphique suivant représente la surface de prix  $F(t, x)$  en fonction de  $x$  et  $100(T-t)$ . Les paramètres choisis sont  $r = 9\%$ ,  $\sigma = 30\%$ ,  $T = 0.6$ ,  $K = 40$ .



## 5.7 Les Grecques

### 5.7.1 Définition

Les Grecs sont des indicateurs qui mesurent la sensibilité de la prime (i.e du prix) d'une option par rapport à un paramètre donné (le cours du sous-jacent, le temps, la volatilité). Leur importance pratique est très grande (cf infra).

Si  $h$  est un actif contingent, nous savons que son prix à  $t$  est de la forme  $F(t, S_t)$ .

**Définition 5.7.1** On appelle “grecques” les quantités suivantes :

- $\Delta$  mesure la sensibilité du prix par rapport au sous jacent

$$\Delta_t(S_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) \quad (5.23)$$

- $\Gamma$  mesure la sensibilité du delta par rapport au sous jacent

$$\Gamma_t(S_t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t) \quad (5.24)$$

- $\Theta$  mesure la sensibilité du prix par rapport au temps

$$\Theta_t(S_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) \quad (5.25)$$

- $\rho$  mesure la sensibilité du prix par rapport au taux d'intérêt

$$\rho_t(S_t) = \frac{\partial F}{\partial r}(t, S_t) \quad (5.26)$$

- *vega* (qui n'est pas une lettre grecque!!!) mesure la sensibilité du prix par rapport à la volatilité

$$vega_t(S_t) = \frac{\partial F}{\partial \sigma}(t, S_t). \quad (5.27)$$

On remarque au passage que l'EDP de Black et Scholes peut se réécrire (dans le cadre du paragraphe 5.5) sous la forme

$$\Theta_t(x) + rx\Delta_t(x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\Gamma_t(x) = rF(t, x)$$

**Exercice 5.7.1** Dans le cas du call et du put, montrer que les valeurs des grecques à  $t = 0$  sont données par le tableau suivant :

	Call	Put
$\Delta$	$N(d_1) > 0$	$-N(-d_1) < 0$
$\Gamma$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}N'(d_1) > 0$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}N'(d_1) > 0$
$\Theta$	$-\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d_1) - Kre^{-rT}N(d_2) < 0$	$\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d_1) + Kre^{-rT}(N(d_2) - 1) ??$
$\rho$	$TKe^{-rT}N(d_2) > 0$	$TKe^{-rT}(N(d_2) - 1) < 0$
<i>vega</i>	$x\sqrt{T}N'(d_1) > 0$	$x\sqrt{T}N'(d_1) > 0$

Notons que dans ce cas particulier, une fois que les paramètres du modèle sont calés, pour calculer explicitement les grecques il suffit de pouvoir calculer la fonction de répartition d'une gaussienne  $N$ . Ceci ne peut se faire de manière exacte, il existe des approximations numériques bien connues pour ce problème (voir [11]). On peut, par ailleurs, utiliser la fonction "cdfnor" de scilab.

### 5.7.2 Cas où le payoff est de la forme $h = f(S_T)$

On se bornera ici aux cas du delta et du gamma.

On a vu précédemment que dans le cas où  $h = f(S_T)$ ,  $P_t^h = F(t, S_t)$  avec

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

**Proposition 5.7.1** *On a*

$$\Delta_t(x) = e^{-r(T-t)} E^* \left[ \frac{W_{T-t}}{x\sigma(T-t)} f(S_{T-t}^x) \right] \quad (5.28)$$

et

$$\Gamma_t(x) = e^{-r(T-t)} E^* \left[ \left( \frac{-W_{T-t}}{x^2\sigma(T-t)} + \frac{W_{T-t}^2 - (T-t)}{(\sigma(T-t)x)^2} \right) f(S_{T-t}^x) \right] \quad (5.29)$$

où  $(S_t^x)$  est (sous  $P^*$ ) le MB géométrique tel que  $S_0^x = x$ .

**Preuve :** On se limite à la démonstration de (5.28), la méthode étant identique pour (5.29). Nous allons supposer que  $f \in C_K^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , le cas général se traitant par approximation.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on a

$$\Delta_t(x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{f(xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}})}_{g(x,y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Or

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Ainsi par IPP,

$$\Delta_t(x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{x\sigma\sqrt{T-t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Sous  $P^*$ ,  $dS_t^x = rS_t^x dt + \sigma S_t^x dW_t$  donc

$$S_t^x = xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t},$$

ainsi,

$$\Delta_t(x) = e^{-r(T-t)} E^* \left[ \frac{W_{T-t}}{x\sigma(T-t)} f(S_{T-t}^x) \right]. \square$$

**Exercice 5.7.2** *Montrer que*

$$vega_t(x) = x^2 T \sigma \Gamma_t(x).$$

### 5.7.3 Intérêt pratique du $\Delta$ et du $\Gamma$

Nous avons vu dans le cadre du paragraphe 5.5 que  $\Delta_t(S_t)$  a un intérêt financier très important : Il s'agit de la part d'actif risqué que doit contenir le portefeuille de couverture à l'instant  $t$ . Le  $\Gamma$  quant à lui est une mesure de la sensibilité de cette quantité d'actif risqué aux variations du cours. Ainsi, plus le  $\Gamma$  est élevé (en valeur absolue) plus il faut modifier souvent et de manière significative la composition du portefeuille. Quand on pense que dans un marché réel (et contrairement à nos hypothèses) il y a des coûts de transaction parfois élevés à chaque opération, le  $\Gamma$  revêt une importance capitale pour ce qui est de la rentabilité de la stratégie de couverture. Sa connaissance est primordiale.

## 5.8 Black et Scholes en pratique

### 5.8.1 Spécification de $\sigma$

Les formules de prix et de couverture ne dépendent que d'un paramètre non directement observable : la volatilité ( $b$  disparaît dans l'univers risqué neutre). Se pose alors la question de la valeur de ce paramètre.

Une manière simple de procéder et l'utilisation de données historiques. Soit  $\tilde{T} \in \mathbb{R}_+$ . A partir des valeurs du cours de l'actif dans le passé  $[-\tilde{T}, 0]$ , on peut estimer  $\sigma$  par des voies statistiques. On suppose, pour cela, que la dynamique de l'actif risqué sur  $[-\tilde{T}, 0]$  est la même que sur  $[0, T]$ . Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  représentant le nombre d'observations (effectuées à intervalles de temps réguliers) du cours passé de l'actif, les variables aléatoires

$$Y_1^N = \text{Log} \left( \frac{S_0}{S_{-\frac{\tilde{T}}{N}}} \right), \dots, Y_N^N = \text{Log} \left( \frac{S_{-\tilde{T}}}{S_{-\frac{(N-1)\tilde{T}}{N}}} \right)$$

sont, sous la probabilité historique, i.i.d de loi

$$\mathcal{N}\left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\tilde{T}}{N}, \sigma^2\frac{\tilde{T}}{N}\right).$$

Une manière de trouver  $\sigma$  est d'utiliser l'estimateur de variance empirique donné par la formule

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{\tilde{T}(N-1)} \sum_{i=1}^N (Y_i^N - \bar{Y})^2}$$

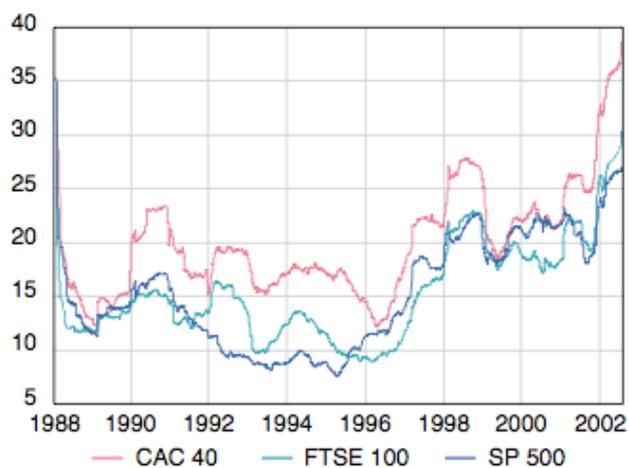
où

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i^N.$$

En pratique, on prend souvent  $\tilde{T} = T$  pour ne pas prendre en compte des données trop anciennes. Le choix de  $N$  (qu'on voudrait pouvoir prendre le plus grand possible) est limité par la fréquence des quotations sur le marché. Notons enfin que des modèles statistiques (modèles GARCH) plus raffinés peuvent permettre d'avoir une approche plus complète de ce problème.

### Volatilité historique à un an des indices SP 500, CAC 40 et FTSE 100

(en %)



Sources : Banque de France, Bloomberg

### 5.8.2 Prix et couverture

Pour fixer le prix d'un produit financier, le praticien utilise la formule

$$P_0^h = E^*[e^{-r(T)} f(S_T)].$$

Il doit ensuite mettre en place la stratégie de couverture qui en théorie annule complètement son risque. Pour cela il devrait dans l'absolu ajuster son portefeuille **en temps continu** et donc calculer pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\Delta_t(S_t)$  (quantité d'actif risqué) et en déduire la quantité d'actif non risqué.

En réalité, la couverture est réajustée en temps discret car :

- a) les transactions physiques sont forcément discrètes
- b) la présence de coûts de transaction limite le nombre de transactions.

Contrairement au modèle théorique, la couverture va être imparfaite et la position du praticien risqué. On touche là à un des problèmes majeurs de la modélisation en temps continu. En pratique sur un intervalle de temps  $[t, t + h]$ , le vendeur calcule le  $\Delta$  en  $t$ . La question est de savoir s'il peut conserver cette position jusqu'en  $t + h$  sans commettre une erreur trop grande. Pour cela il calcule le  $\Gamma$  en  $t$ . Si ce  $\Gamma$  est grand en valeur absolue, le vendeur a intérêt à réajuster sa position entre  $t$  et  $t + h$  (ou à se surcouvrir). Si le  $\Gamma$  est petit, il peut raisonnablement conserver sa position. Notons qu'il y a une dualité forte entre la multiplication des réajustements et le coût supplémentaire que cela entraîne (présence de coûts de transaction). C'est pourquoi le prix d'un actif se décompose de la manière suivante :

$$\text{Prix effectif} = \text{Prix théorique (coût de la couverture théorique)} + \text{coût de la couverture effective} + \text{marge.}$$

Notons, que le *vega* a aussi une grande importance, car il indique l'attention que nous devons porter à l'approximation de  $\sigma$  (partie précédente).

### 5.8.3 Calcul du prix, du $\Delta$ et du $\Gamma$

Dans le cas du Call et du Put, les formules du prix, du  $\Delta$  et du  $\Gamma$  sont explicites (on parle de formules fermées). D'un point de vue numérique elle nécessite de savoir calculer la fonction de répartition d'une  $\mathcal{N}(0, 1)$  ce qui est classique (commande "cdfnor" de scilab par exemple). Lorsque le payoff est plus compliqué, on ne peut espérer obtenir de telles formules. On doit mettre en place des procédures numériques. Une possibilité est d'utiliser la méthode de Monte Carlo (voir [3]).

**Rappels :** La méthode de Monte Carlo (dans sa version basique) repose sur la LFGN : Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires i.i.d, on suppose  $X \in L^1$ . En notant  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , on a

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[p.s \text{ et } L^1]{} E[X_1].$$

C'est un outil pour calculer de manière approchée des espérances, outil dont la vitesse est précisée par le TCL.

On doit donc évaluer de manière numérique

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} E^* [f(S_{T-t}^x)], \quad \Delta_t(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) \text{ et } \Gamma_t(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x)$$

où  $(S_t^x)$  est le MB géométrique vérifiant  $S_0^x = x$ .

Pour  $F(t, x)$ , on utilise une méthode de Monte Carlo classique car on sait simuler très simplement un échantillon de  $(S_{T-t}^x)$ . Pour les deux autres quantités qui sont les dérivés de la première, une méthode classique et d'utiliser un schéma de différence finie i.e d'utiliser les approximations suivantes

$$\Delta_t(x) \approx \frac{F(t, x+h) - F(t, x-h)}{2h}$$

$$\Gamma_t(x) \approx \frac{F(t, x+h) + F(t, x-h) - 2F(t, x)}{h^2}$$

où  $h$  est suffisamment petit et où  $F(t, x+h)$ ,  $F(t, x-h)$  et  $F(t, x)$  sont calculés par méthode de Monte Carlo.

### Problème pour les grecques :

- Deux facteurs d'approximation (MC + différence finie (choix de  $h$ )) et donc d'erreur
- En pratique peu efficace lorsque le payoff est irrégulier

Une idée est d'utiliser la proposition 5.7.1, en effet, on a démontré que

$$\Delta_t(x) = e^{-r(T-t)} E^* \left[ \frac{W_{T-t}}{x\sigma(T-t)} f(S_{T-t}^x) \right]$$

et

$$\Gamma_t(x) = e^{-r(T-t)} E^* \left[ \left( \frac{-W_{T-t}}{x^2 \sigma (T-t)} + \frac{W_{T-t}^2 - (T-t)}{(\sigma (T-t) x)^2} \right) f(S_{T-t}^x) \right].$$

Ainsi, dans Black et Scholes ces quantités peuvent être calculées sans recours au schéma de différence finie.

#### Avantages :

- Un seul facteur d'approximation (MC) et donc d'erreur
- Technique qui ne dépend pas du Payoff
- Plus efficace pour le  $\Gamma$  (double dérivation) que pour le  $\Delta$  (simple dérivation).

#### Illustrations numériques

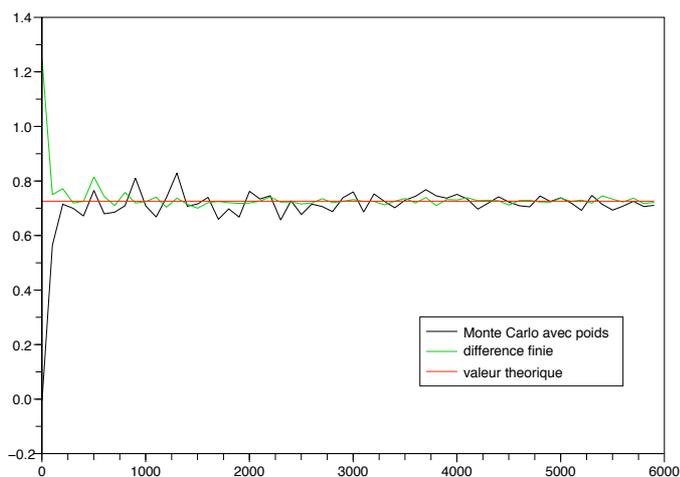


FIG. 5.1 –  $\Delta$  d'un call européen de strike  $K = 100$  ( $x = 100$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.1$ ,  $T = 1$ )

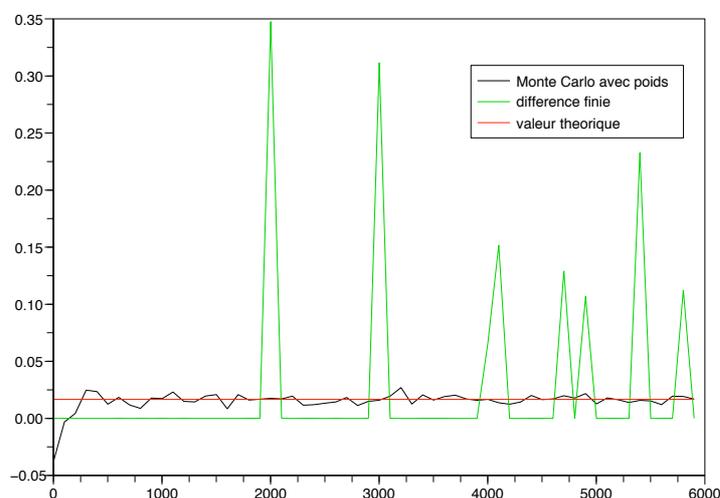


FIG. 5.2 –  $\Gamma$  d'un call européen de strike  $K = 100$  ( $x = 100$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.1$ ,  $T = 1$ )

**Exercice 5.8.1** On considère une **option digitale** caractérisée par le payoff  $I_{S_T \geq K}$  à  $T$ .

a) Montrer que dans ce cas  $F(0, x) = e^{-rT}KN(d)$ ,  $\Delta_0(x) = \frac{e^{-rT}}{x\sigma\sqrt{T}}n(d)$  et  $\Gamma_0(x) = \frac{e^{-rT}}{x^2\sigma^2T}n(d) \left( d + \sigma\sqrt{T} \right)$  où  $n$  est la densité d'une  $\mathcal{N}(0, 1)$  et où  $d = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T)}{\sigma\sqrt{T}}$ .

b) En utilisant scilab, effectuer un calcul approché de  $\Delta_0(x)$  et  $\Gamma_0(x)$  en utilisant MC avec poids et le schéma aux différences finies. Comparer les résultats.

c) Reprendre les questions précédentes dans le cas d'une option corridor caractérisée par son payoff  $I_{K_2 \geq S_T \geq K_1}$  à  $T$ .

d) Quelles conclusions tirez vous concernant l'emploi de ces deux méthodes numériques.

## 5.9 Splendeurs et misères du modèle de Black et Scholes

En dépit de certaines inconsistances que nous passerons en revue ultérieurement, le modèle de Black-Scholes reste un outil de référence pour les praticiens. Il peut être vu comme une approximation de première intention qui peut et doit être

affinée par diverses techniques de trading. Le but de cette partie est d'inviter le lecteur à pousser la réflexion au delà de ce cours (élémentaire) en faisant allusion à quelques problématiques fondamentales.

### 5.9.1 Avantages

Rarement la publication d'un modèle théorique a eu un impact concret aussi important dans un délai aussi court ([13]). L'adoption par les milieux financiers fut quasi instantanée, la reconnaissance académique (plus tardive) s'est traduite par l'obtention du prix Nobel d'économie en 1997. Comment expliquer un tel engouement ?

#### Simplicité et efficacité théorique

Le modèle de Black et Scholes ne dépend en pratique que d'un paramètre non directement observable : la volatilité qui est une mesure de l'agitation des cours (l'hypothèse de stationnarité des rendements assurant une évaluation statistique simple de ce paramètre). De plus, les formules de prix et les stratégies de couverture associées sont, dans le cas des actifs les plus simples (call et put), parfaitement spécifiées, calculables et d'une grande simplicité soulignant le côté opérationnel de cet outil. Enfin, ce modèle a le bon goût d'annuler (en théorie cf [18]) le risque lié aux opérations de couverture.

#### Richesse des points de vue

Pour les options plus complexes qui ne peuvent être traitées que par voie numérique (absence de formules fermées) le modèle de Black et Scholes a l'avantage de proposer deux approches complémentaires dont l'efficacité est liée au problème traité : Une approche purement déterministe liée à la résolution de certaines équations aux dérivés partielles par discrétisation et une approche probabiliste basée sur le calcul d'espérances par méthode de Monte Carlo. On renverra le lecteur à [7] et [19] pour le cas des options barrières et à [12] et [20] pour les options de type asiatique.

#### Auto-prédiction

L'utilisation massive du modèle de Black Scholes par les praticiens a pour effet d'influencer (par son existence même) le cours des actifs. Fisher Black lui même ironisait sur le sujet : *“Les opérateurs savent maintenant utiliser la formule et les variantes. Ils l'utilisent tellement bien que les prix de marché sont généralement proches de ceux donnés par la formule, même lorsqu'il devrait exister un écart important...”*

## 5.9.2 Limites

### L'hypothèse de log-normalité

Nous renvoyons le lecteur à [17] (dont ce petit paragraphe s'inspire grandement) pour des considérations plus précises sur le sujet.

L'hypothèse de log-normalité du modèle de Black et Scholes dérive de manière plus ou moins indirecte des travaux pionniers de Bachelier : En 1900, Bachelier part du constat fructueux et visionnaire qu'il est possible de représenter l'évolution du cours d'un actif financier par une loi de probabilité bien choisie. Cette loi synthétise le caractère imprévisible et parfois irrationnel des décisions humaines individuelles liées à toute activité financière. De ce fait, il choisit de représenter le cours de l'actif par un processus ayant les caractéristiques du mouvement Brownien. Cette quantité pouvant être négative sur un ensemble de probabilité non nulle, Samuelson suggérera quelques 65 ans plus tard d'utiliser un Brownien géométrique plutôt que le Brownien lui même. Ces hypothèses (caractère gaussien des hypothèses) qui se révèlent techniquement fructueuses (travaux de Markovitz, Sharpe et Linter) pour l'étude théorique de l'équilibre des marchés financiers sont reprises avec succès par Black et Scholes dans le cadre de l'évaluation des produits dérivés.

Cependant, dès le milieu des années 60, Mandelbrot montre de manière empirique que les cours des actifs financiers sont loin de suivre une loi normale (ou log-normale) car les queues de distribution associées à ces lois de probabilité sont beaucoup trop plates. L'occurrence des événements extrêmes (krach) est grandement sous évaluée. Cette problématique majeure fait l'objet d'une recherche statistique très active incluant l'étude des modèles ARCH, des modèles à volatilité stochastique et des processus multifractals.

### $\sigma$ constante ?

On pourra se référer au site "[www.ivolatility.com](http://www.ivolatility.com)" pour obtenir des données numériques sur la volatilité de certains titres américains et à [8] pour plus de précisions.

Dans le modèle de Black et Scholes, la volatilité est le seul paramètre qui n'est pas directement observable. Comme certaines options simples (les calls européens notamment) sont également cotées sur des marchés organisés (marchés dérivés), il est possible en se servant des données de marché d'obtenir des renseignements sur ce paramètre. En effet, on rappelle que le prix du call est donné par

$$C_t = S_t N(d_1(t, S_t)) - K e^{-r(T-t)} N(d_2(t, S_t))$$

où

$$d_1(t, x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \text{ et } d_2(t, x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Ainsi, le prix du call est une fonction strictement croissante de la volatilité historique car

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma}(t, x) = x\sqrt{T - t}N'(d_1) > 0.$$

Donc si on observe sur le marché le prix à  $t$  d'un call de maturité  $T$  et de strike  $K$  sur l'actif risqué (prix qui est noté  $C_t^{Obs}(x, T, K)$ ), il existe un unique réel  $\sigma^{impl}$  tel que

$$C_t^{Obs}(x, T, K) = C_t(x, T, K, \sigma^{impl}).$$

**Remarque 5.9.1** *Le calcul effectif de la volatilité implicite est obtenue classiquement en utilisant des méthodes de type Newton ou bisection.*

Dans le cas de Black et Scholes, la volatilité implicite devrait en toute rigueur être égale (pour toutes les options considérées) à la volatilité historique (écart type des rendements du sous jacent). En pratique, le phénomène est très différent, les observations assurent que

- La volatilité implicite est plus grande que la volatilité historique
- La volatilité implicite dépend de la maturité et du strike de l'option. Cette dépendance étant d'autant plus forte que la maturité de l'option est courte.

Pour ce qui est du second point le graphique ci dessous nous indique la dépendance au strike de la volatilité d'une option d'achat européenne dont le sous jacent est un actif coté sur le marché américain S&P 500. La forme de la courbe est tout à fait significative, on parle d'un smile (sourire) de volatilité. En effet, on voit que pour  $500 \leq K \leq 1400$ , la courbe est décroissante (phénomène de skew) alors que pour les très grand strike elle croît (phénomène de smile).

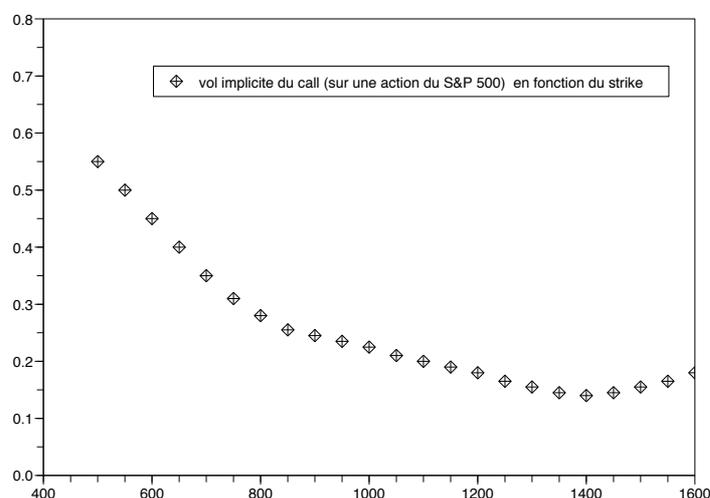


FIG. 5.3 – Un exemple de smile de volatilité

Sans trop rentrer dans les détails, plusieurs considérations empiriques peuvent tenter d'éclairer ce phénomène :

- La volatilité implicite est plus grande pour les options qui ne sont pas à la monnaie ( $K \neq S_0$ ). Cela indique que le marché accorde une probabilité plus forte à des valeurs éloignées de la tendance centrale que celle d'une distribution log-normale (lien avec le paragraphe précédent).
- Le smile peut s'expliquer par la prime d'illiquidité (moins d'offre et de demande pour les prix d'exercices extrêmes).

**Remarque 5.9.2** *Aujourd'hui les opérateurs de marché raisonnent plus en termes de volatilité implicite qu'en termes de prix. La formule de Black et Scholes est toujours un traducteur privilégié entre prix et volatilité implicite.*

Pour conclure, notons qu'en dépit des remarques précédentes, de nombreux produits dont la volatilité est manifestement non constante sont quand même évalués avec la formule de Black et Scholes. On peut montrer en effet (cf [10]) que lorsque le gamma d'une option est positif (payoff convexe comme par exemple le call) et lorsque le trader choisit une volatilité plus grande que la volatilité réelle, le résultat final lui est favorable. Cette propriété fondamentale du modèle de Black et Scholes est connue sous le nom de robustesse. Elle tempère en un sens les critiques ci-dessus.

# Bibliographie

- [1] L. BACHELIER : *Théorie de la spéculation*, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 17, 21-86, 1900.
- [2] F. BLACK, M. SCHOLES : *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81, n°3, 637-654, 1973.
- [3] N. BOULEAU, D. TALAY : *Probabilités numériques*, INRIA, 1992.
- [4] J.C. COX, S.A. ROSS, M. RUBINSTEIN : *Options pricing : a simplified approach*, Journal of Financial Economics, 7, 229-263, 1979.
- [5] J.-P. FOUQUE, G. PAPANICOLAOU AND K. R. SIRCAR : *Derivatives in Financial Markets with Stochastic volatility*, Cambridge University Press, 2000.
- [6] E. FOURNIER AND AL : *Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance*, Finance and Stochastics, 3, 391-412, 1999.
- [7] H. GEMAM, M. YOR : *Pricing and Hedging Double-Barrier Options : A Probabilistic Approach*, Mathematical Finance, vol. 6, Issue 4, 1996.
- [8] M.H. GROUARD, S. LÉVY, C. LUBOCHINSKY : *La volatilité boursière : des constats empiriques aux difficultés d'interprétation*, Banque de France, RSF, 2003.
- [9] J.C. HULL : *Options, Futures and other derivatives*, Prentice Hall, 2003.
- [10] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC-PICQUÉ, S. SHREVE : *Robustness of the Black and Scholes Formula*, Mathematical Finance, vol. 8, Issue 2, 93-126, 1998.
- [11] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Second edition, Ellipses, Paris, 1997.
- [12] B. LAPEYRE, E TEMAM : *Competitive Monte Carlo Method for the pricing of asian options*, Journal of computational finance, 2002.
- [13] D. MACKENZIE, : *An Equation and its Worlds : Bricolage, Exemplars, Disunity and Performativity in Financial Economics*, Social Studies of Science 33 (6) : 831-868, 2003.
- [14] R. MERTON : *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183, 1973.

- [15] D. NUALART : *The Malliavin Calculus and related Topics*, Springer Verlag, New York, 1995.
- [16] B. OKSENDAL : *An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics*, 1996.
- [17] B. POCHART : *Processus multifractals en finance et valorisation d'options par minimisation de risques extrêmes*, Thèse de Doctorat, 2003.
- [18] F.E. RACICOT, R. THÉORET : *Simulations de la couverture delta et de la couverture delta-gamma d'un portefeuille dans le cadre du modèle de Black et Scholes*, RePAd Working Paper Series UQO-DSA-wp122006, Département des sciences administratives, UQO.
- [19] R. ZVAN, K. R. VETZAL, AND P. A. FORSYTH. : *PDE Methods for Pricing Barrier Options*, Journal of Economic Dynamics and Control, 1998.
- [20] R. ZVAN, K. R. VETZAL, AND P. A. FORSYTH. : *Robust numerical methods for PDE models of asian options* , J. Computational Finance, 1, 39-78, 1998.